



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Geoscience 336 (2004) 505–512



Géomatériaux

Émergence de la complexité dans un modèle simple de comportement mécanique des roches

David Amitrano

LAEGO – INPL, Écoles des Mines de Nancy, Parc de Saurupt, 54024 Nancy cedex, France

Reçu le 5 septembre 2003 ; accepté le 18 novembre 2003

Présenté par Jacques Angelier

Résumé

Nous présentons un modèle simple pour le comportement mécanique des roches, basé sur un endommagement progressif et une interaction élastique entre éléments. Ce modèle permet de simuler un certain nombre d'observations expérimentales : comportement mécanique allant du fragile au ductile, structure fractale de l'endommagement, distribution en loi puissance des avalanches d'endommagement. Ces propriétés macroscopiques ne sont pas introduites à l'échelle élémentaire, mais résultent d'interactions entre éléments. L'émergence de cette complexité permet de considérer le processus de déformation des roches comme un système complexe possédant une dynamique non linéaire. *Pour citer cet article : D. Amitrano, C. R. Geoscience 336 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Emerging complexity in a simple model of the mechanical behaviour of rocks. We propose a mechanical model for the behaviour of rocks based on progressive damage at the elementary scale and elastic interaction. It allows us to simulate several experimental observations: mechanical behaviour ranging from brittle to ductile, fractal structure of the damage, power-law distribution of the damage avalanches. These macroscopic properties are not incorporated at the elementary scale, but are the results of the interaction between elements. This emerging complexity permits us to consider the strain rock process as a complex system characterized by non-linear dynamics. *To cite this article: D. Amitrano, C. R. Geoscience 336 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : complexité ; comportement mécanique ; invariance d'échelle ; modélisation

Keywords: complexity; mechanical behaviour; scaling invariance; modelling

Abridged English version

1. Introduction

For scales ranging from laboratory samples to the Earth crust, the mechanical behaviour of rocks is often

considered as complex, term generally used instead of complicated. This complexity is involved by the various mechanical behaviours that are observed for rocks (elastic/plastic, brittle/ductile, damage, viscosity ...) and to the numerous parameters influencing the behaviour that are related to the rock fabric (mineralogy, microstructure, crack density and distributions ...) and/or to the loading conditions (pressure, tempera-

Adresse e-mail : amitrano@mines.inpl-nancy.fr (D. Amitrano).

ture, strain rate) [13]. The complexity is also related to the low-scale strain mechanisms (dislocation flow, cracks propagation, fracture shearing . . .) that interact and whose effects on the macroscopic behaviour are difficult to estimate.

The complexity is also revealed by the dynamics of the deformation process, e.g., as observed through the seismic waves emitted by the low-scale processes (acoustic emission at the laboratory scale or seismicity at the earth crust scale). On a wide range of scales, the seismicity displays both an unpredictability of each event (size, time and location of occurrence) and a statistical predictability. As a matter of fact, one may observe particularly robust power-law distributions on both size and time and space domains [1,2,8,11,12,17,18,20–23,25,26], which indicate scaling invariance and long-range correlation. The fractal properties observed for damage [3,9,15,24] (roughness, microstructure) are supplementary arguments for complexity of the rock deformation.

In order to better understand what is the origin of this complexity, we propose a numerical model based on a simple elementary behaviour that is able to reproduce numerous experimental observations at the macroscopic scale. Hence the behaviour of rocks can be considered as resulting from emerging complexity, i.e., the macroscopic properties are not incorporated at the elementary scale, but are the results of the interaction between elements.

2. Model features

The proposed model is based on progressive elastic damage. The effective elastic modulus of the damaged material, E_{eff} , is expressed as a function of the initial modulus, E_0 , and the damage D .

$$E_{\text{eff}} = E_0(1 - D) \quad (1)$$

D is quantitatively related to the cracks density [14]. Such a relation works when the considered volume is large compared with the defect size (i.e., cracks' size). Hence, the elementary scale is mesoscopic. The simulated material is discretized using a 2D finite element method with plane-strain hypothesis. The loading consists in progressively increasing the vertical displacement of the upper boundary of the model. When an element exceeds a given damage threshold, its elastic modulus is multiplied by a factor

$(1 - D)$. Because of the elastic interaction, the stress redistribution can induce an avalanche of damages. The number of damaged elements during a single loading step is the avalanche size. The Mohr–Coulomb criterion is used as a damage threshold:

$$\tau = \sigma \tan \phi + C \quad (2)$$

where τ is the shear stress, σ is the normal stress, ϕ is the internal friction angle and C is the cohesion. In order to obtain a macroscopic behaviour that differs from the elementary one, it is necessary to integrate heterogeneity in the elements properties [1,2]. Here we present results for which the cohesion is randomly drawn from a uniform distribution. More details on the model features are given in [1,2].

3. Macroscopic properties

The study of the model sensitivity has shown that the macroscopic behaviour is only controlled by the internal friction angle ϕ [1,2]. Fig. 1 displays simulation results for ϕ ranging from 0 to 56°, i.e., the macroscopic behaviour, the final damage state, the size frequency distribution and the spatial correlation integral of the damage $C(r)$ [6]. The correlation dimension D_2 is calculated by estimating the slope of $C(r)$ in a log–log diagram. The fitting is restricted to the power-law section of $C(r)$.

The first stage of the mechanical behaviour is linear. The non-linearity appears with the onset of the damage activity. Regarding the value of ϕ , the behaviour ranges continuously from ductile to brittle (Fig. 1(a)). In the brittle case, there is a huge and sudden stress decrease just after the peak, which could be considered as a macrofracture of the model. This is associated with the damage localization within thin shear bands (Fig. 1(b)). On the other hand, the ductile behaviour is characterized by the absence of macroscopic stress decrease. The damage becomes progressively localized within thick shear bands. All the intermediary situations can be reached by tuning the ϕ parameter. The size-frequency distributions follow a power-law whose exponent (slope on a log–log plot) depends on the ϕ parameter (Fig. 1(c)). The integral $C(r)$ follows a power law (Fig. 1(d)), which indicates a fractal structure of the damage. The correlation dimension D_2 depends on the ϕ parameter.

All the macroscopic properties are sensible to the ϕ parameter. The study of the stress field around a single defect has shown that this parameter strongly influences the interaction geometry between elements [1, 2]. The higher the ϕ parameter is, the more anisotropic the interaction is. Hence this anisotropy influences the damage localisation, the avalanches dynamics and the macroscopic behaviour.

4. *Emerging complexity and implication for the dynamics of rock deformation*

The proposed model is based on an elementary progressive damage within an elastic heterogeneous model. Each element has isotropic properties associated with a simple behaviour, i.e., decrease of the elastic modulus by discrete damage events. At the macroscopic scale, one may observe different aspects of a complex behaviour: the mechanical behaviour is non-linear and ranges from ductile to brittle, the final damage state has a fractal structure, the size-frequency of damage events follows a power-law. Fig. 2 gives a synthetic scheme of all these observations. As these properties are not incorporated at the elementary scale, they are emerging properties of the system due to the interaction between elements. We have shown that changing the geometry of interaction (by changing the ϕ parameter) modifies all the macroscopic properties. According to that, the simulated deformation process can be considered as a complex system [4,10,16]. The emergence of free-scale distributions for both size and space distributions is a supplementary aspect of complexity [4].

5. *Conclusion*

A simple mechanical model has been proposed for the behaviour of rocks. It permits us to simulate several experimental observations: mechanical behaviour ranging from brittle to ductile, power-law distribution of the damage events, shear bands strain localization, fractal structure of the damage. These properties are not incorporated at the elementary scale, but result from the interaction between elements. The emergence of these macroscopic properties allows us to consider the rock deformation process as a complex system displaying non-linear dynamics.

1. Introduction

Le comportement mécanique des roches, pour des échelles allant de celle de l'échantillon de laboratoire à celle de la croûte terrestre, est souvent décrit comme complexe, terme couramment employé comme synonyme de compliqué. Cette complexité tient, d'une part, à la diversité des comportements mécaniques observés pour les roches, (élastique/plastique, fragile/ductile, endommageant, visqueux...) et, d'autre part, aux nombreux paramètres influençant le comportement mécanique. Il peut s'agir de paramètres liés à la composition du matériau rocheux (minéralogie, microstructure, densité, distribution de fissuration), ou aux conditions de chargement (pression, température, vitesse de déformation). Ainsi, un même matériau pourra montrer un comportement fragile ou ductile selon les conditions de chargement [13]. La complexité tient également aux processus de déformations à petite échelle (propagation de fissures, plasticité par saut de dislocation, par glissement sur des discontinuités) qui interagissent entre eux et dont il est difficile d'estimer l'effet sur le comportement mécanique macroscopique.

La complexité du comportement mécanique apparaît également au sein même du processus de déformation. Lors de la sollicitation mécanique du matériau rocheux, la déformation globale comporte des déformations inélastiques localisées, qui peuvent être quantifiées par le biais de l'onde élastique de déformation et de contrainte émise [18,21]. On l'observe aussi bien à l'échelle crustale (sismicité) qu'à l'échelle des massifs rocheux (microsismicité) ou qu'à celle des échantillons de laboratoire (émission acoustique, EA). À ces différentes échelles, la sismicité montre à la fois une imprédictibilité de chaque événement pris individuellement (taille, lieu et temps d'occurrence) et une prédictibilité statistique (raccordement à des lois statistiques bien identifiées). En effet, on observe des distributions en loi puissance particulièrement robustes dans les trois domaines de la taille des événements sismiques [8,18–22], de leur répartition spatiale [12,17,22,25,26] et temporelle [11,17,23]. Ces distributions indiquent une invariance d'échelle, c'est-à-dire une absence de taille caractéristique [20] et une corrélation entre différentes échelles. Des expériences de laboratoire ont permis d'observer des variations de ces paramètres corrélées aux différentes phases

du comportement mécanique macroscopique [1,12,18, 21]. Par ailleurs, il a été observé que l'invariance d'échelle peut être limitée, soit par la taille finie de l'objet considéré [19,25], soit par une taille caractéristique de sa structure interne [25], soit encore par un changement des mécanismes de rupture selon l'échelle considérée [19].

Enfin, l'observation de l'état d'endommagement de roches après déformation mécanique révèle des propriétés fractales (rugosité des surfaces de rupture, microstructure ...) qui sont des indicateurs supplémentaires de la complexité [3,9,15,24].

Pour mieux comprendre cette complexité, une voie consiste à intégrer l'ensemble des paramètres jugés pertinents dans le comportement élémentaire (propriétés mécaniques, processus micro-mécanique, micro-structure) et à simuler le comportement mécanique ainsi obtenu. Cette approche se confronte à de nombreuses difficultés, à la fois méthodologiques (estimations des paramètres, hiérarchisations des processus, description effective de la structure) et numériques (absence de méthode générale pour prendre en compte l'ensemble des processus).

Une autre voie consiste à utiliser une loi élémentaire simple et à faire interagir un grand nombre d'éléments. Des modèles numériques de ce type ont été proposés, qui permettent de simuler un comportement macroscopique varié (du ductile au fragile) à partir d'un comportement élémentaire simple [1, 2,27]. Nous proposons ici de recourir à ce type de modèle pour montrer qu'un certain nombre d'observations relatives au comportement mécanique des roches peuvent être vues comme des propriétés émergentes d'un système complexe. Le terme complexe est utilisé ici comme définissant un système dont les propriétés macroscopiques sont absentes à l'échelle élémentaire et émergent de l'interaction de ses éléments [4,16].

2. Description du modèle numérique

Le modèle utilisé est basé sur un endommagement élastique progressif isotrope. Le module élastique effectif du matériau endommagé, E_{eff} , est fonction du module élastique initial, E_0 , et du paramètre d'endommagement, D .

$$E_{\text{eff}} = E_0(1 - D) \quad (1)$$

D peut être quantitativement relié à la densité de fissure [14]. Cette relation suppose que la taille d'un élément est grande devant celle des défauts qu'il contient. L'échelle élémentaire est donc mésoscopique. La résolution de l'état mécanique (contrainte déformation) se fait par la méthode des éléments finis en 2D sous l'hypothèse des déformations planes. Le modèle macroscopique est chargé en augmentant progressivement le déplacement imposé à la limite supérieure du modèle. Lorsqu'un élément atteint son seuil d'endommagement, son module élastique est diminué par un facteur $(1 - D)$. Du fait des redistributions de contrainte induites par cet endommagement sur les éléments environnants, une avalanche peut se déclencher. Le nombre d'endommagements au cours d'un pas de chargement constitue la taille de l'avalanche.

Le seuil d'endommagement est déterminé par le critère de Mohr–Coulomb :

$$\tau = \sigma \tan \phi + C \quad (2)$$

où τ est la contrainte tangentielle ; σ est la contrainte normale ; C est la cohésion et ϕ est l'angle de frottement interne. Pour un modèle entièrement homogène, le comportement élémentaire est reproduit à l'identique à l'échelle macroscopique [1,2]. Au contraire, la présence d'hétérogénéités conduit à l'émergence d'un comportement macroscopique différent du comportement élémentaire. L'hétérogénéité du matériau est simulée en attribuant la cohésion aléatoirement selon une distribution homogène. Pour plus de détails sur le modèle numérique, voir les Réfs. [1,2].

3. Propriétés macroscopiques des simulations

L'étude de sensibilité du modèle aux différents paramètres a montré que le comportement macroscopique est uniquement déterminé par le paramètre ϕ [1, 2]. La Fig. 1 présente les résultats de simulations pour ϕ variant de 0 à 56°. On présente le comportement mécanique, l'état d'endommagement final, la distribution de la taille des avalanches et l'intégrale de corrélation spatiale de l'endommagement, $C(r)$ [6]. La dimension de corrélation spatiale D_2 est déterminée en estimant la pente de $C(r)$ dans une représentation log–log. L'ajustement est réalisé uniquement dans la section en loi puissance de $C(r)$.

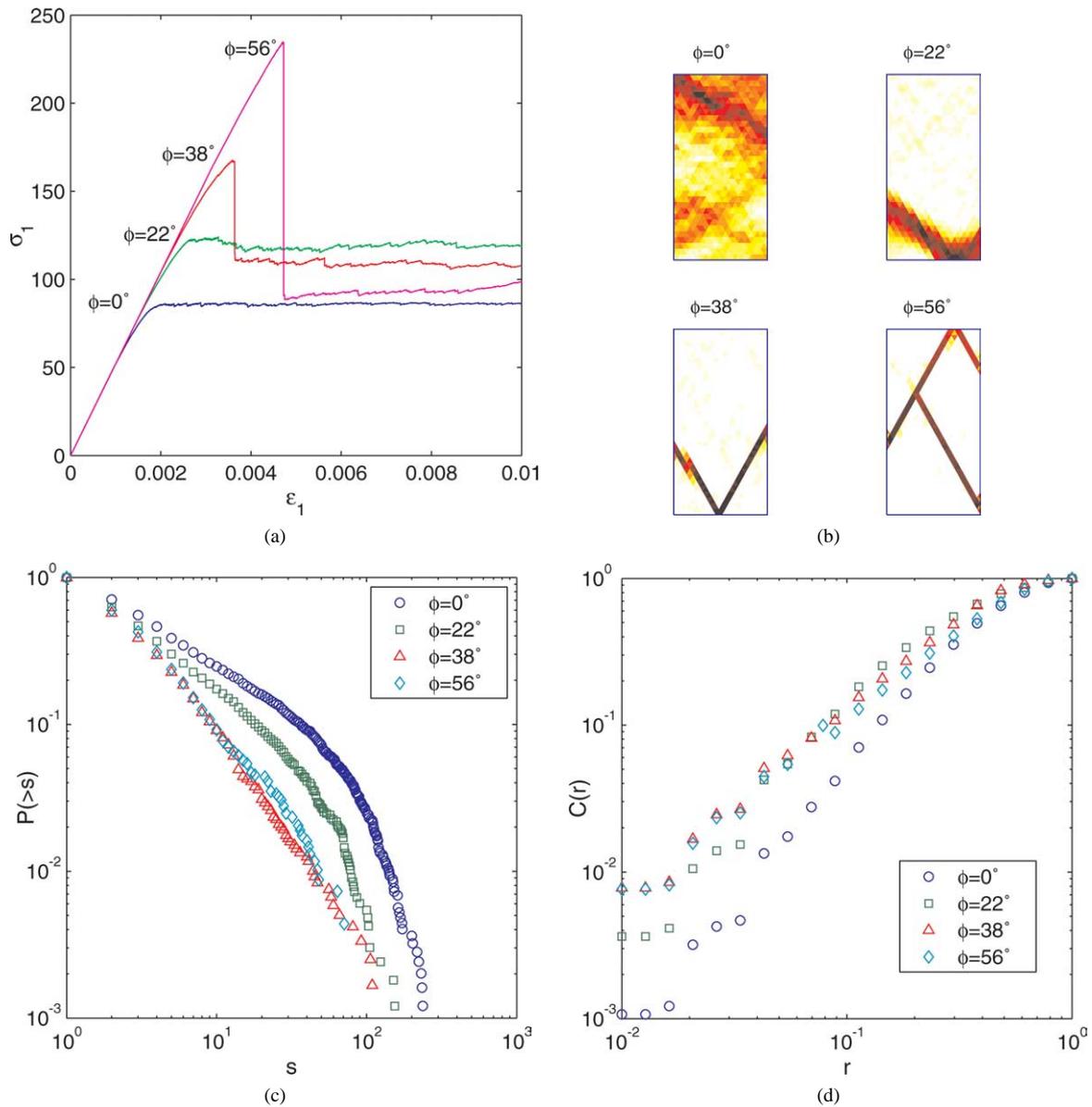


Fig. 1. Résultats de simulation pour différentes valeurs de ϕ . (a) Comportement mécanique macroscopique, (b) endommagement final du modèle, (c) distribution de la taille des avalanches, (d) intégrale de corrélation spatiale de l'endommagement.

Fig. 1. Simulation results for various values of ϕ . (a) Macroscopic mechanical behaviour, (b) final damage state, (c) avalanche-size frequency, (d) spatial correlation integral of the damage.

À l'échelle macroscopique (modèle pris dans son ensemble), le comportement mécanique comprend une phase linéaire, puis l'apparition d'une non-linéarité associée à l'apparition d'avalanches. Selon la valeur du paramètre ϕ , le comportement peut varier continûment

du ductile au fragile (Fig. 1(a)). Dans le cas fragile, la contrainte macroscopique connaît une chute importante et brutale, associée à une localisation soudaine de l'endommagement. Dans le cas ductile, la contrainte atteint une valeur stable sans chute de contrainte.

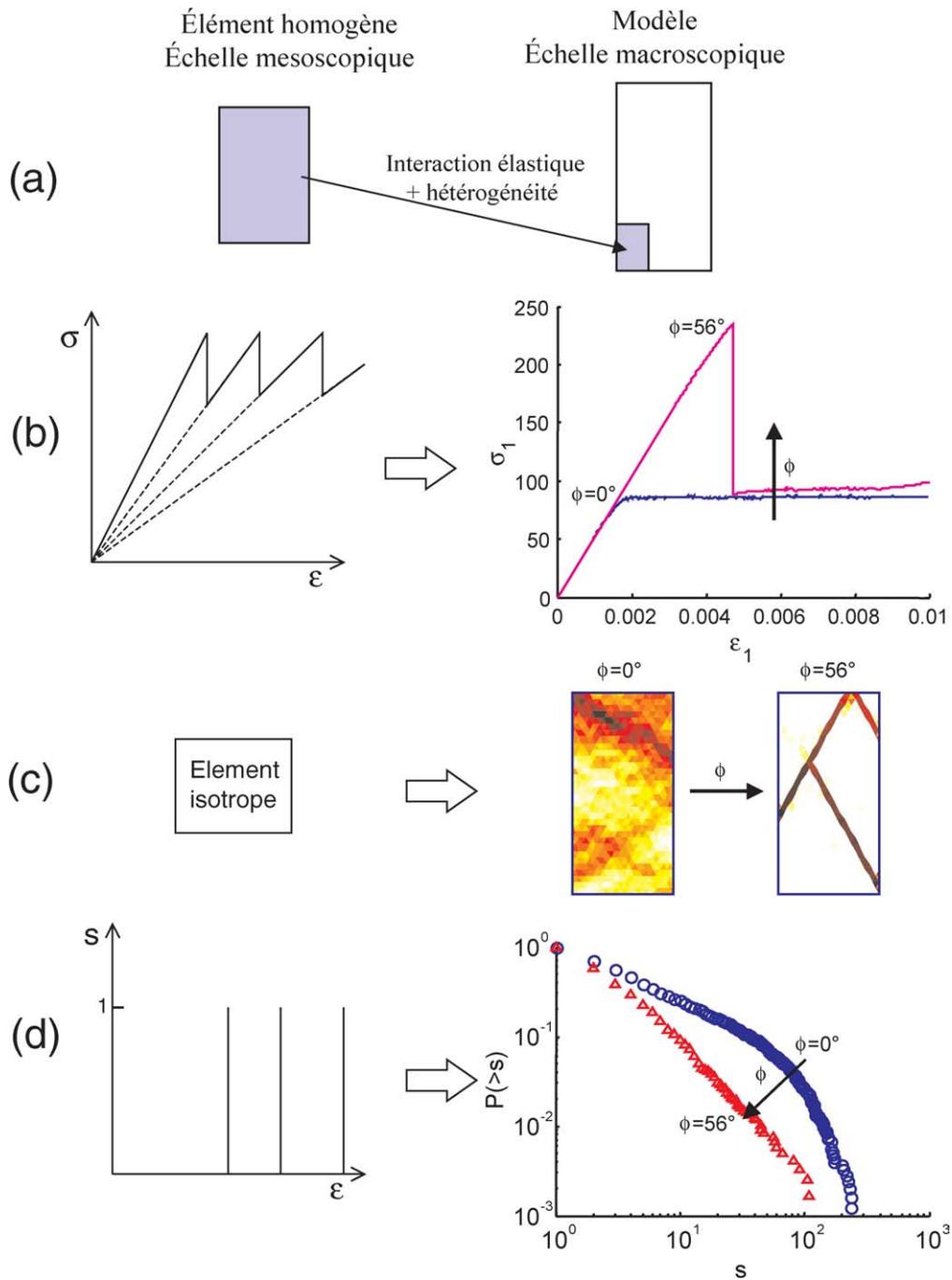


Fig. 2. Émergence de la complexité. (a) Échelle élémentaire et macroscopique, (b) comportement mécanique élémentaire et macroscopique, (c) localisation de l'endommagement, (d) distribution de la taille des avalanches.

Fig. 2. Emerging complexity. (a) Elementary and macroscopic scales, (b) elementary and macroscopic mechanical behaviour, (c) damage localization, (d) avalanche-size frequency.

L'endommagement se localise progressivement sous forme de bande (Fig. 1(b)). Toutes les situations intermédiaires entre ces deux cas extrêmes peuvent être simulées en faisant varier le paramètre ϕ . La distribution de la taille des événements suit une loi puissance dont l'exposant dépend de ϕ (Fig. 1(c)). L'intégrale de corrélation spatiale $C(r)$ suit également une loi puissance (Fig. 1(d)), ce qui indique que l'endommagement possède une structure fractale. La dimension de corrélation spatiale D_2 (pente de l'intégrale en diagramme log-log) dépend également de ϕ .

L'ensemble des propriétés macroscopiques est sensible au paramètre ϕ . L'étude du champ de contrainte autour de défauts a montré que ce paramètre conditionne fortement la géométrie d'interaction entre les éléments [1,2]. Celle-ci est d'autant plus anisotrope que ϕ est élevé. Cette anisotropie influe à la fois sur la localisation de l'endommagement, sur la dynamique des avalanches et sur le comportement macroscopique. Ces résultats sont obtenus avec un modèle à deux dimensions. Étant donné le rôle prépondérant de la géométrie d'interaction sur les résultats de simulation, on peut considérer que le passage à trois dimensions pourrait avoir un effet important. Pour des modèles d'endommagement de réseau de fibre [9], proches du modèle présenté ici, le passage de 2D à 3D n'induit pas de changement significatif sur le comportement macroscopique, ni sur l'émergence de la distribution en loi puissance. En revanche, cela change significativement les valeurs des exposants caractérisant ces lois puissance.

4. Émergence de la complexité et implications pour la dynamique de la déformation des roches

Le modèle proposé est basé sur un endommagement élémentaire progressif dans un modèle élastique hétérogène. Le comportement élémentaire est très simple : diminution progressive du module élastique, sans perte de résistance. Chaque élément possède des propriétés isotropes et ne connaît que des événements d'endommagement de taille unitaire. À l'échelle macroscopique, on observe un comportement complexe à plusieurs titres : le comportement mécanique est non linéaire et peut varier du ductile au fragile ; l'endommagement final possède une structure fractale plus ou moins localisée ; les avalanches suivent une distribution en loi de puissance. La Fig. 2 synthé-

tise l'ensemble de ces observations. Ces propriétés n'étant pas incorporées explicitement dans le comportement élémentaire, il s'agit de propriétés émergentes du système résultant de l'interaction entre éléments. Nous avons, en outre, montré que la modification de la géométrie d'interaction influence l'ensemble des propriétés macroscopiques. En cela, le processus de déformation s'apparente à un système complexe [4,10,16]. L'émergence d'invariance d'échelle dans la taille et la répartition spatiale est un aspect supplémentaire de la complexité [4].

Le type de modèle présenté ici permet de rapprocher l'étude du comportement mécanique des roches de celle d'autres systèmes dynamiques (tas de sable, percolation, *ising*, blocs-ressorts ...) possédant des propriétés particulières (comportement critique, critique auto-organisé ...) qui peuvent être étudiées par les outils de la physique statistique [5,7,16,27]. En cela, cette approche constitue une alternative à l'approche mécanique classique (approche linéaire), qui considère le comportement mécanique macroscopique comme la somme des comportements élémentaires.

5. Conclusion

Nous avons présenté un modèle mécanique simple pour le comportement des roches. Celui-ci permet de simuler plusieurs observations expérimentales : comportement mécanique allant du fragile au ductile, distribution en loi puissance des événements d'endommagement, localisation de la déformation sous forme de bande, structure fractale de l'endommagement.

Ces propriétés ne sont pas introduites à l'échelle élémentaire et résultent de l'interaction entre les éléments du modèle. L'émergence de ces propriétés macroscopiques permet de considérer le processus de déformation des roches comme un système complexe possédant une dynamique non linéaire.

Remerciements

L'auteur remercie vivement Franz Lahaie pour les nombreuses discussions lors de la rédaction du manuscrit, ainsi que Jacques Angelier et un relecteur anonyme pour leur contribution à l'amélioration de l'article. Cette recherche a bénéficié du soutien du programme ACI CATNAT – Insu du ministère français de la Recherche (contribution n° 355).

Références

- [1] D. Amitrano, Brittle-ductile transition and associated seismicity: experimental and numerical studies and relationship with the b-value, *J. Geophys. Res. B* 108 (1) (2003) 2044, doi:10.1029/2001JB000680.
- [2] D. Amitrano, J.-R. Grasso, D. Hantz, From diffuse to localized damage through elastic interaction, *Geophys. Res. Lett.* 26 (1999) 2109–2112.
- [3] D. Amitrano, J. Schmittbuhl, Fracture roughness and gouge distribution of a granite shear band, *J. Geophys. Res. B* 107 (12) (2002) 2375, doi:10.1029/2002JB001761.
- [4] J. Dubois, *La dynamique non linéaire en physique du globe*, Masson, Paris, 1995.
- [5] A. Garcimartin, A. Guarino, L. Bellon, S. Ciliberto, Statistical properties of fracture precursors, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 3202.
- [6] P. Grassberger, I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica* 9 (1983) 189–208.
- [7] A. Guarino, A. Garcimartin, S. Ciliberto, An experimental test of the critical behaviour of fracture precursors, *European Phys. J. B* 6 (1998) 13–24.
- [8] B. Gutenberg, C.F. Richter, *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, second ed., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1954.
- [9] A. Hansen, J. Schmittbuhl, Origin of the universal roughness exponent of brittle fracture surfaces: stress-weighted percolation in the damage zone, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 045505.
- [10] J.-C. Heudin, *L'évolution au bord du Chaos*, Hermès, Paris, 1998.
- [11] T. Hirata, Omori's power law aftershock sequences of microfracturing in rock fracture experiment, *J. Geophys. Res.* 92 (1987) 6215–6221.
- [12] T. Hirata, T. Satoh, K. Ito, Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock, *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 90 (1987) 369–374.
- [13] J.C. Jaeger, N.G.W. Cook, *Fundamentals of Rock Mechanics*, Chapman and Hall, London, 1979.
- [14] J. Kemeny, N.G.W. Cook, Effective moduli, non-linear deformation and strength of a cracked elastic solid, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* 23 (1986) 107–118.
- [15] R.L. Kranz, Microcracks in rocks: a review, *Tectonophysics* 100 (1983) 449–480.
- [16] F. Lahaie, Pertinence du formalisme des transitions de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques, in: *LGIT*, Université Joseph-Fourier, Grenoble, 2000, p. 255.
- [17] D. Legrand, A. Cisternas, L. Dorbath, Multifractal analysis of the 1992 Erzincan aftershock sequence, *Geophys. Res. Lett.* 23 (1996) 933–936.
- [18] D.A. Lockner, J.D. Byerlee, V. Kuskenko, A. Ponomarev, A. Sidorin, Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite, *Nature* 350 (1991) 39–42.
- [19] I. Main, Apparent breaks in scaling in the earthquake cumulative frequency-magnitude distribution: fact or artifact?, *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 90 (2000) 86–97.
- [20] I.G. Main, Statistical physics, seismogenesis and seismic hazard, *Rev. Geophys.* 34 (1996) 433–462.
- [21] C.H. Scholz, The frequency-magnitude relation of microfracturing in rock and its relation to earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 58 (1968) 399–415.
- [22] C. Sue, J.R. Grasso, F. Lahaie, D. Amitrano, Mechanical behavior of western alpine structures inferred from statistical analysis of seismicity, *Geophys. Res. Lett.* 29 (2002) 65–1–65-4.
- [23] L. Telesca, V. Lapenna, M. Macchiato, Investigating the time-clustering properties in seismicity of Umbria–Marche region (central Italy), *Chaos, Solitons & Fractals* 18 (2003) 203–217.
- [24] B. Velde, D. Moore, A. Badri, B. Ledesert, Fractal analysis of fractures during brittle to ductile changes, *J. Geophys. Res.* 98 (1993) 11935–11940.
- [25] P. Volant, J.-R. Grasso, The finite extension of fractal geometry and power-law distribution of shallow earthquakes: a geomechanical effect, *J. Geophys. Res.* 99 (1994) 21879–21889.
- [26] H. Xie, W.G. Pariseau, Fractal character and mechanism of rock bursts, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* 30 (1993) 343–350.
- [27] S. Zapperi, A. Vespignani, E. Stanley, Plasticity and avalanche behaviour in microfracturing phenomena, *Nature* 388 (1997) 658–660.