Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 101–106

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Problémes mathématiques de la mécanique

Comportement asymptotique des structures formées de plaques

Asymptotic behavior of structures made of plates

Georges Griso

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Laboratoire Jacques-Louis Lions (Analyse Numérique), 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 24 octobre 2002 ; accepté le 31 octobre 2002

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Après avoir introduit différentes décompositions des déplacements d'une plaque puis d'une structure formée de plaques, on donne le comportement asymtotique de cette structure. ***Pour citer cet article : G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

After having introduced different decompositions of the displacements of a plate and of a structure made of plates, we give the asymptotic behavior of this structure. ***To cite this article: G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

A first study concerning the asymptotic behavior of a structure made of two thin plates of thickness ε, is due to Le Dret [3]. At the limit, one has a two-dimensional system coupling the flexion displacements of the mid-surface of the plate; conditions of the junction are also given. By a standard thin domain technique, the plates are transformed into a fixed domain. In the three-dimensional system of elasticity thus transformed, ε appears explicitly as a parameter. One then takes $\varepsilon \to 0$ to derive the asymptotic model (notice that membrane-type displacements are not mentioned in [3]).

Our study is a continuation of [1] and [2]. We use the notions of elementary, extensional and inextentional displacements to characterize the global displacements of thin plates or of structures made of thin plates.

In Section 2 we introduce the elementary displacement $U_e(x) = \mathcal{U}(\hat{x}) + \mathcal{R}(\hat{x}) \wedge x_3\vec{e}_3$ associated to the displacement u_δ of a plate of thickness 2δ (Definition 2). Theorem 1 gives estimates of appropriate norms of U_e and $u_\delta - U_e$ in terms of δ. In Proposition 2 we show (formula (3)) that the displacement u_δ is the sum of a

Adresse e-mail : georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(02)00009-2

Kirchhoff–Love displacement and of a residual one $\tilde{u}$, which satisfies estimate (4). This decomposition allows to give a simple interpretation (see (6)) of the limits of the unfolding $\mathcal{T}_\delta(\gamma_{ij}(u_\delta))$ of the elasticity tensor $\gamma_{ij}(u_\delta)$ (where $\mathcal{T}_\delta$ is given in Definition 3).

A general structure $\mathcal{S}_\delta$ made of plates of thickness 2δ is introduced in Section 3. We extend to it the decompositions from Section 2. Definition 4 gives the elementary displacement U_e of $\mathcal{S}_\delta$. Its first component $\mathcal{U}$ is the displacement of $\mathcal{S}$, the skeleton of $\mathcal{S}_\delta$. The second one denoted $\mathcal{R}$, characterizes the rotations and the shearings of $\mathcal{S}_\delta$. Theorem 4 is the equivalent of Theorem 1 for the plate-structures. Definitions 5 and 6 introduce the notions of inextensional and extensional displacements of $\mathcal{S}$, respectively. Proposition 6 shows that $\mathcal{U} = U_E + U_I$, i.e., $\mathcal{U}$ is the sum of an extensional displacement and of an inextensional one. It also gives estimates with respect to δ for $|U_E|_\rho$ and $|U_I|_\rho$, where the norm $|\cdot|_\rho$ is defined by (7). Convergences (10) are the equivalent for a structure of the convergences (6) obtained in Section 2 for a plate.

Finally, in Section 4, we give the limit for $\delta \to 0$ of the linearized system of elasticity (11), written in $\mathcal{S}_\delta$, where F_δ satisfies assumptions (12). The main result is Theorem 7, which shows that the limit extensional displacement U_E given by (10) is the solution of a second-order system (13), while the limit U_I of the inextensional displacement is the solution of a fourth-order system (14).

In this Note we use the Einstein convention of summation over repeated indices. As a rule, the Greek indices α and β take values in $\{1, 2\}$ and the Latin indices i, i', j and j' take values in $\{1, 2, 3\}$.

1. Introduction

Une première étude du comportement asymptotique d'une structure formée par deux plaques minces est due à Le Dret [3]. Partant du problème tridimensionnel de l'élasticité et se plaçant dans les domaines de référence, Le Dret obtient le problème couplant les déplacements de flexion.

Notre étude fait suite à [1] et [2]. On reprend, en les étendant aux plaques et aux structures formées de plaques, les notions de déplacement élémentaire, de déplacements extensionnel et inextensionnel. Les différentes décompositions d'un déplacement permettent d'interpréter simplement les limites des éclatés du tenseur des déformations d'une suite de déplacements.

La structure formée de plaques est présentée dans la Section 3. Dans le dernier paragraphe, on étudie le comportement asymptotique du problème de l'élasticité linéaire posé dans une telle structure.

2. Les déplacements d'une plaque

Soit $\omega \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné de frontière polygonale. La plaque $\Omega_\delta = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \mathrm{dist}(x, \omega) < \delta\}$, $\delta > 0$, est un ouvert ayant pour surface moyenne $\omega_\delta = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \mathrm{dist}(x, \omega) < \delta\}$. La plaque de référence est $\Omega = \omega \times]-1, 1[$. Le point courant de Ω_δ (resp. Ω) s'écrit $x = (x_1, x_2, x_3) = (\hat{x}, x_3)$ (resp. $(\hat{x}, t_3)$). On pose,

$$\mathcal{E}(u, \omega') = \int_{\omega'} \gamma_{ij}(u)\gamma_{ij}(u), \quad \gamma_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\}, \qquad \mathcal{D}(u, \omega') = \int_{\omega'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

où ω' est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et u un élément de $H^1(\omega', \mathbf{R}^3)$.

Lemme. *Il existe un opérateur de prolongement $\mathcal{P}$ de $H^1(\Omega_\delta, \mathbf{R}^3)$ dans $H^1(\widetilde{\Omega}_\delta, \mathbf{R}^3)$, linéaire et continu tel que*

$$\forall u \in H^1(\Omega_\delta, \mathbf{R}^3), \quad \mathcal{E}(\mathcal{P}(u), \widetilde{\Omega}_\delta) \leqslant C\mathcal{E}(u, \Omega_\delta), \quad \text{où } \widetilde{\Omega}_\delta = \omega_{2\delta} \times]-\delta, \delta[.$$

Démonstration. On utilise le Théorème 2.1 de [1] pour construire le prolongement de u à l'aide de réflexions. □

Définition 1. Un *déplacement élémentaire de plaque* (d.e.p.) est un élément $\Phi \in H^1(\Omega_\delta, \mathbf{R}^3)$, de la forme $\Phi(x) = \mathcal{A}(\hat{x}) + \mathcal{B}(\hat{x}) \wedge x_3\vec{e}_3$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in H^1(\omega_\delta, \mathbf{R}^3) \times H^1(\omega_\delta, \mathbf{R}^2)$, p.p. $x \in \Omega_\delta$ ($\vec{e}_3$ est la direction normale à ω).

Définition 2. Déplacement élémentaire de plaque associé à un déplacement de $H^1(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)$.

À tout déplacement $u\in H^1(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)$, (dont le prolongement à $\widetilde{\Omega}_\delta$ est encore noté u), on associe le d.e.p. $U_e(x)=\mathcal{U}(\hat{x})+\mathcal{R}(\hat{x})\wedge x_3\vec{e}_3$, où

$$\mathcal{U}(\hat{x})=\frac{6}{\pi\delta^3}\int_{B(\hat{x};\delta/2)}u(M)\,\mathrm{d}M,\quad \mathcal{R}(\hat{x})=\frac{24}{\pi\delta^5}\int_{B(\hat{x};\delta/2)}\overrightarrow{\hat{x}M}\wedge u(M)\,\mathrm{d}M,\quad \hat{x}\in\omega_\delta. \tag{1}$$

Théorème 1. *On a les estimations suivantes* :

$$\begin{cases}\delta^3\|\nabla\mathcal{R}\|^2_{L^2(\omega_\delta,\mathbf{R}^6)}+\delta\left\|\dfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_\alpha}-\mathcal{R}\wedge\vec{e}_\alpha\right\|^2_{L^2(\omega_\delta,\mathbf{R}^3)}\leqslant C\mathcal{E}(u,\Omega_\delta),\\ \mathcal{E}(U_e,\Omega_\delta)+\mathcal{D}(u-U_e,\Omega_\delta)\leqslant C\mathcal{E}(u,\Omega_\delta),\quad \|u-U_e\|^2_{L^2(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)}\leqslant C\delta^2\mathcal{E}(u,\Omega_\delta).\end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. On montre que ω_δ peut être recouvert par une famille finie d'ouverts $(\mathcal{O}_n)_{1\leqslant n\leqslant N_\delta}$ de diamètre $R\delta$, étoilés par rapport à une boule de rayon $\delta/2$, où R ne dépend que de $\partial\omega$. Le Théorème 2.1 de [1] donne, pour chaque ouvert $\mathcal{O}_{n,\delta}=\mathcal{O}_n\times\,]-\delta,\delta[$, l'existence d'un déplacement rigide r_n tel que $\mathcal{D}(u-r_n,\mathcal{O}_{n,\delta})\leqslant C\mathcal{E}(u,\mathcal{O}_{n,\delta})$ et $\|u-r_n\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{n,\delta},\mathbf{R}^3)}\leqslant C\delta^2\mathcal{E}(u,\mathcal{O}_{n,\delta})$, les constantes ne dépendent que de R. On calcule les moyennes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$, puis on compare r_n et la restriction de U_e à l'ouvert $\mathcal{O}_{n,\delta}$ pour en déduire les estimations (2). □

Proposition 2. *Tout déplacement u appartenant à $H^1(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)$ est la somme d'un déplacement de Kirchhoff–Love et d'un déplacement résiduel*

$$u(x)=\left(\mathcal{U}_1(\hat{x})-x_3\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial x_1}(\hat{x})\right)\vec{e}_1+\left(\mathcal{U}_2(\hat{x})-x_3\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial x_2}(\hat{x})\right)\vec{e}_2+\mathcal{U}_3(\hat{x})\vec{e}_3+\tilde{u}(x),\quad \textit{p.p. dans } \Omega_\delta, \tag{3}$$

où $\tilde{u}$ vérifie

$$\frac{1}{\delta^2}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)}+\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_3}\right\|^2_{L^2(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)}\leqslant C\mathcal{E}(u,\Omega_\delta). \tag{4}$$

Démonstration. On pose $\tilde{u}(x)=\{u(x)-(\mathcal{U}_1(\hat{x})-x_3\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial x_1}(\hat{x}))\vec{e}_1-(\mathcal{U}_2(\hat{x})-x_3\frac{\partial\mathcal{U}_3}{\partial x_2}(\hat{x}))\vec{e}_2-\mathcal{U}_3(\hat{x})\vec{e}_3\}$. On obtient (4) grâce à (2). □

Définition 3. L'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\delta$ de $L^2(\Omega_\delta)$ dans $L^2(\Omega)$ est défini par $\mathcal{T}_\delta(\varphi)(\hat{x},t_3)=\varphi(\hat{x},\delta t_3)$, p.p. dans Ω.

Théorème 3. *Soit $(u_\delta)_{\delta>0}$ une suite de déplacements de $H^1(\Omega_\delta,\mathbf{R}^3)$ vérifiant $\mathcal{E}(u_\delta,\Omega_\delta)\leqslant C\delta$. Il existe un déplacement rigide $r_\delta(x)=a_\delta+b_\delta\wedge x$ et des suites extraites (encore notées de la même façon), tels que*

$$\begin{cases}\mathcal{U}_{1,\delta}-a_{1,\delta}+x_2b_{3,\delta}\rightharpoonup U_1,\quad \mathcal{U}_{2,\delta}-a_{2,\delta}-x_1b_{3,\delta}\rightharpoonup U_2\quad \textit{dans } H^1(\omega)\textit{ faible},\\ \delta\{\mathcal{U}_{3,\delta}-a_{3,\delta}+x_1b_{2,\delta}-x_2b_{1,\delta}\}\rightharpoonup U_3\quad \textit{dans } H^1(\omega)\textit{ faible.}\end{cases} \tag{5}$$

De plus, U_3 appartient à $H^2(\omega)$. On a enfin les convergences faibles suivantes des éclatés de u_δ, de $\tilde{u}_\delta$ et des composantes du tenseur des déformations :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_\delta(u_{\delta,1} - a_{1,\delta} + x_2 b_{3,\delta}) \rightharpoonup U_1 - t_3\dfrac{\partial U_3}{\partial x_1}, \quad \mathcal{T}_\delta(u_{2,\delta} - a_{2,\delta} - x_1 b_{3,\delta}) \rightharpoonup U_2 - t_3\dfrac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ \delta\mathcal{T}_\delta(u_{3,\delta} - a_{3,\delta} + x_1 b_{2,\delta} - x_2 b_{1,\delta}) \rightharpoonup U_3 \quad \textit{dans } H^1(\Omega) \textit{ faible}, \\ \dfrac{1}{\delta}\mathcal{T}_\delta(\tilde{u}_\delta) \rightharpoonup \tilde{u} \quad \textit{dans } L^2\big(\omega, H^1\big(]-1,1[, \mathbf{R}^3\big)\big) \textit{ faible}, \\ \mathcal{T}_\delta\big(\gamma_{\alpha\beta}(u_\delta)\big) \rightharpoonup \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \dfrac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right\} - t_3\dfrac{\partial^2 U_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \mathcal{T}_\delta\big(\gamma_{\alpha 3}(u_\delta)\big) \rightharpoonup \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial t_3}, \\ \mathcal{T}_\delta\big(\gamma_{33}(u_\delta)\big) \rightharpoonup \dfrac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t_3} \quad \textit{dans } L^2(\Omega) \textit{ faible}. \end{cases} \tag{6}$$

Démonstration. Ces convergences sont les conséquences de l'écriture (3) des déplacements u_δ et des estimations (2) et (4). □

3. Comportement asymptotique d'une suite de déplacements d'une structure formée de plaques

On se donne un ensemble de N domaines plans, inclus dans $\mathbf{R}^3$, bornés, de frontière polygonale, $(\omega_l)_{1\leqslant l\leqslant N}$. Le squelette $\mathcal{S}$ est la réunion des ensembles $\overline{\omega}_l$. Une *face* de $\mathcal{S}$ est un fermé $\overline{\omega}_l$. Une *arête* est un segment maximal, non réduit à un point, commun à un même ensemble de faces ou un segment maximal de la frontière d'une face. Un *sommet* est une extrémité d'une arête.

On suppose que

- pour tout couple de faces $(\overline{\omega}_l, \overline{\omega}_p)$, il existe une suite de faces $\overline{\omega}_l = \overline{\omega}_{l_0}, \overline{\omega}_{l_1}, \ldots, \overline{\omega}_{l_k} = \overline{\omega}_p$ telle que $\overline{\omega}_{l_r}$ et $\overline{\omega}_{l_{r+1}}$ ont une arête en commun, $0 \leqslant r \leqslant k-1$,
- pour tout sommet A et tout couple de faces $(\overline{\omega}_l, \overline{\omega}_p)$ contenant A, il existe une suite de faces $\overline{\omega}_l = \overline{\omega}_{l_0}, \overline{\omega}_{l_1}, \ldots, \overline{\omega}_{l_k} = \overline{\omega}_p$ telle que $\overline{\omega}_{l_r}$ et $\overline{\omega}_{l_{r+1}}$ ont une arête en commun contenant A, $0 \leqslant r \leqslant k-1$,
- le squelette $\mathcal{S}$ est fixé le long de certaines arêtes, la partie fixée de $\mathcal{S}$ est notée Γ_0.

La structure formée de plaques est le domaine $\mathcal{S}_\delta = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \operatorname{dist}(x, \mathcal{S}) < \delta\}$. On suppose que $\mathcal{S}_\delta$ est fixée sur $\Gamma_{0,\delta} = \{x \in \partial\mathcal{S}_\delta \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma_0) = \delta\}$. La plaque d'épaisseur 2δ (resp. la plaque de référence) et de surface moyenne $\omega_{l,\delta}$ contenant $\overline{\omega}_l$ est notée $\Omega_{l,\delta}$ (resp. Ω_l). Chaque plaque $\Omega_{l,\delta}$ est rapportée à un repère local $(O^{(l)}; \vec{e}_1^{\,(l)}, \vec{e}_2^{\,(l)}, \vec{e}_3^{\,(l)})$, $\vec{e}_3^{\,(l)}$ étant la direction normale à la face. La restriction d'une fonction φ définie sur $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}_\delta$ est notée $\varphi^{(l)}$. La notation est semblable pour les variables locales.

$H^1(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)$ (respectivement $H^1_\rho(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)$) est l'ensemble des fonctions définies p.p. dans $\mathcal{S}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^3$, telles que la restriction $\varphi^{(l)}$ appartient à $H^1(\omega_l, \mathbf{R}^3)$ (resp. telles que les restrictions $\varphi_1^{(l)}$, $\varphi_2^{(l)}$ appartiennent à $H^1(\omega_l)$ et $\varphi_3^{(l)} \in H^1_\rho(\omega_l) = \{\varphi \in L^2(\omega_l) \mid \rho^{(l)}\nabla\varphi \in L^2(\omega_l, \mathbf{R}^2)\}$, où ρ est la distance d'un point de $\mathcal{S}$ aux sommets), et telles que pour toute arête $J \subset \overline{\omega}_l \cap \overline{\omega}_k$, on a l'égalité des restrictions $\varphi^{(l)}_{|J} = \varphi^{(k)}_{|J}$ dans $H^{1/2}(J, \mathbf{R}^3)$.

On munit $H^1_\rho(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)$ du produit scalaire et de la norme

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle_\rho = \sum_{l=1}^N \int_{\omega_l} \big\{\gamma_{\alpha\beta}\big(\mathcal{U}^{(l)}\big)\gamma_{\alpha\beta}\big(\mathcal{V}^{(l)}\big) + \rho^{(l)}\nabla\mathcal{U}_3^{(l)} \cdot \nabla\mathcal{V}_3^{(l)}\big\} + \int_{\Gamma_0} \mathcal{U}\cdot\mathcal{V}, \quad |\mathcal{U}|_\rho = \sqrt{\langle \mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_\rho}. \tag{7}$$

Lemme. *$H^1_\rho(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)$ est le complété de $H^1(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)$ pour la norme $|\cdot|_\rho$.*

Définition 4. Un *déplacement élémentaire de structure-plaques* (d.e.s.p.) est un élément appartenant à $H^1(\mathcal{S}_\delta; \mathbf{R}^3)$ dont la restriction à toute plaque de $\mathcal{S}_\delta$ est un déplacement élémentaire de plaque.

Un d.e.s.p. U_e a deux composantes, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$, appartenant à l'espace H^1 de la réunion des faces $\overline{\omega}_{l,\delta}$; ce déplacement $\mathcal{U}$ rend compte du déplacement des faces du squelette tandis que $\mathcal{R}$ rend compte de la rotation des directions normales aux plaques et de la rotation des faces autour des arêtes.

Théorème 4. *Pour tout déplacement $u \in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3) = \{\varphi \in H^1(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3) \mid \varphi = 0$ sur $\Gamma_{0,\delta}\}$, il existe un d.e.s.p. $U_e \in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3)$ de composantes $\mathcal{U}, \mathcal{R} \in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3) = \{V \in H^1(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3) \mid V = 0$ sur $\Gamma_0\}$ tel que*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{N} \left\{ \delta^3 \| \nabla \mathcal{R}^{(l)} \|^2_{L^2(\omega_{l,\delta}, \mathbf{R}^6)} + \delta \left\| \frac{\partial \mathcal{U}^{(l)}}{\partial x_\alpha^{(l)}} - \mathcal{R}^{(l)} \wedge \vec{e}_\alpha^{(l)} \right\|^2_{L^2(\omega_{l,\delta}, \mathbf{R}^3)} \right\} \leqslant C\mathcal{E}(u, \mathcal{S}_\delta), \\ \mathcal{E}(U_e, \mathcal{S}_\delta) + \mathcal{D}(u - U_e, \mathcal{S}_\delta) + \dfrac{1}{\delta^2} \|u - U_e\|^2_{L^2(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3)} \leqslant C\mathcal{E}(u, \mathcal{S}_\delta). \end{cases} \tag{8}$$

Démonstration. Pour chaque plaque $\Omega_{l,\delta}$ on considère le d.e.p. défini par (1). Il existe un réel η ne dépendant que de $\mathcal{S}$ tel que les points du complémentaire dans $\mathcal{S}_\delta$ des réunions des domaines $J_\delta = \{\mathrm{dist}(x, J) < \eta\delta\}$, où J est une arête commune à plusieurs faces, appartiennent à une plaque et une seule. Sur ce complémentaire, U_e est égal à l'un des déplacements élémentaires de plaques. Dans un voisinage J_δ d'une arête on modifie ces déplacements élémentaires de plaques pour qu'ils coïncident avec des déplacements élémentaires de poutres (voir [1] et [2]). □

Définition 5. Un *déplacement inextensionnel du squelette* est un élément $\mathcal{U} \in H^1_{\rho,\Gamma_0}(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3) = \{V \in H^1_\rho(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3) \mid V = 0$ sur $\Gamma_0\}$, vérifiant $\gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}^{(l)}) = 0$ pour tout $l \in \{1, \ldots, N\}$.

L'espace des déplacements inextensionnels du squelette est noté D_I.

Définition 6. Un <u>*déplacement extensionnel du squelette*</u> est un élément de l'orthogonal D_E de D_I dans $H^1_{\rho,\Gamma_0}(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)$, et D_E est muni de la norme $\|U\|_E = \sqrt{\sum_{l=1}^N \int_{\omega_l} \gamma_{\alpha\beta}(U^{(l)})\gamma_{\alpha\beta}(U^{(l)})}$.

Proposition 5. *Dans D_E la norme $\|\cdot\|_E$ est équivalente à la norme $|\cdot|_\rho$.*

Démonstration. La norme $\|\cdot\|_E$ vérifie $\|U\|_E \leqslant |U|_\rho$ pour tout $U \in D_E$. Soit $U \in D_E$ pour toute arête J commune à au moins deux faces, $U_{|J}$ appartient à $H^{1/2}(J, \mathbf{R}^3)$ et $\|U_{|J}\|_{H^{1/2}(J,\mathbf{R}^3)} \leqslant C\{\|U\|_E + \|U\|_{L^2(\mathcal{S},\mathbf{R}^3)}\}$. Des estimations de U sur les arêtes et de l'orthogonalité des déplacements extensionnels et inextensionnels, on déduit

$$\sum_{l=1}^{N} \left\| \sqrt{\rho^{(l)}} \nabla U_3^{(l)} \right\|_{L^2(\omega_l, \mathbf{R}^2)} \leqslant C \left\{ \|U\|_E + \|U\|_{L^2(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3)} \right\}. \tag{9}$$

L'inégalité de Korn appliquée aux déplacements $U_1^{(l)}\vec{e}_1^{(l)} + U_2^{(l)}\vec{e}_2^{(l)}$ et (9) donnent alors $\sum_{l=1}^N \{\|\nabla U_1^{(l)}\|_{L^2(\omega_l,\mathbf{R}^2)} + \|\nabla U_2^{(l)}\|_{L^2(\omega_l,\mathbf{R}^2)} + \|\sqrt{\rho^{(l)}}\nabla U_3^{(l)}\|_{L^2(\omega_l,\mathbf{R}^2)}\} \leqslant C\{\|U\|_E + \|U\|_{L^2(\mathcal{S},\mathbf{R}^3)}\}$.

On conclut à l'équivalence des normes en raisonnant par l'absurde. □

Proposition 6. *La première composante $\mathcal{U}$ du d.e.s.p. U_e se décompose en la somme d'un déplacement extensionnel U_E et d'un déplacement inextensionnel U_I et on a $\mathcal{U} = U_E + U_I$, $|U_E|^2_\rho \leqslant \frac{C}{\delta}\mathcal{E}(U_e, \mathcal{S}_\delta)$, $|U_I|^2_\rho \leqslant \frac{C}{\delta^3}\mathcal{E}(U_e, \mathcal{S}_\delta)$.*

Démonstration. L'estimation de U_E est une conséquence de la Proposition 5. De (8) et de l'inégalité de Poincaré, il vient $\delta^3\|\mathcal{R}\|^2_{H^1(\mathcal{S},\mathbf{R}^3)} \leqslant C\mathcal{E}(U_e, \mathcal{S}_\delta)$ puis $\delta^3\|\mathcal{U}\|^2_{H^1(\mathcal{S},\mathbf{R}^3)} \leqslant C\mathcal{E}(U_e, \mathcal{S}_\delta)$. □

Soient $(u_\delta)_{\delta>0}$ une suite de déplacements de $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3)$ vérifiant $\mathcal{E}(u_\delta, \mathcal{S}_\delta) \leqslant C\delta$ et, pour chaque déplacement u_δ, $U_{e,\delta}$ un d.e.s.p. vérifiant (8). Par la Proposition 6 on a $\mathcal{U}_\delta = U_{E,\delta} + U_{I,\delta}$. D'après la Proposition 2, les restrictions $u_\delta^{(l)}$ se décomposent en la somme d'un déplacement de Kirchhoff–Love et d'un déplacement résiduel. On a alors, les convergences suivantes :

$$\begin{cases} \delta\mathcal{U}_\delta \rightharpoonup U_I, \quad \delta\mathcal{R}_\delta \rightharpoonup \mathcal{R} \quad \text{dans } H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3) \text{ faible,} \\ U_{E,\delta} \rightharpoonup U_E, \quad \delta U_{I,\delta} \rightharpoonup U_I \quad \text{dans } H^1_{\rho,\Gamma_0}(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3) \text{ faible,} \\ \delta\mathcal{T}_\delta(u_\delta^{(l)}) \rightharpoonup U_I^{(l)} \quad \text{dans } H^1(\Omega_l, \mathbf{R}^3) \text{ faible,} \\ \mathcal{T}_\delta(u_{\alpha,\delta}^{(l)}) - U_{I,\alpha,\delta}^{(l)} \rightharpoonup U_{E,\alpha}^{(l)} - t_3^{(l)} \dfrac{\partial U_{I,3}^{(l)}}{\partial x_\alpha^{(l)}} \quad \text{dans } H^1(\Omega_l) \text{ faible,} \\ \dfrac{1}{\delta}\mathcal{T}_\delta(\tilde{u}_\delta^{(l)}) \rightharpoonup \tilde{u}^{(l)} \quad \text{dans } L^2(\omega_l, H^1(]-1,1[, \mathbf{R}^3)) \text{ faible,} \\ \mathcal{T}_\delta(\gamma_{\alpha\beta}(u_\delta^{(l)})) \rightharpoonup \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial U_{E,\alpha}^{(l)}}{\partial x_\beta^{(l)}} + \dfrac{\partial U_{E,\beta}^{(l)}}{\partial x_\alpha^{(l)}}\right\} - t_3^{(l)} \dfrac{\partial^2 U_{I,3}^{(l)}}{\partial x_\alpha^{(l)} \partial x_\beta^{(l)}}, \quad \mathcal{T}_\delta(\gamma_{\alpha 3}(u_\delta^{(l)})) \rightharpoonup \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \tilde{u}_\alpha^{(l)}}{\partial t_3^{(l)}}, \\ \mathcal{T}_\delta(\gamma_{33}(u_\delta^{(l)})) \rightharpoonup \dfrac{\partial \tilde{u}_3^{(l)}}{\partial t_3^{(l)}} \quad \text{dans } L^2(\Omega_l) \text{ faible.} \end{cases} \tag{10}$$

De plus, de (8) on déduit que $U_I \in \mathcal{D}_I$, où $\mathcal{D}_I = \{\mathcal{A} \in D_I \mid \exists \mathcal{B} \in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3),\ \partial\mathcal{A}_3^{(l)}/\partial x_\alpha^{(l)} = \mathcal{B}^{(l)} \wedge \vec{e}_\alpha^{(l)}\}$.

4. Comportement asymptotique d'une structure formée de plaques

Le matériau constituant les plaques est homogène et isotrope. Le cadre retenu est celui de l'élasticité linéarisée, ce qui donne le problème variationnel suivant, dans $\mathcal{S}_\delta$:

$$u_\delta \in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3), \quad \int_{\mathcal{S}_\delta} a_{iji'j'}\gamma_{ij}(u_\delta)\gamma_{i'j'}(v) = \int_{\mathcal{S}_\delta} F_\delta \cdot v, \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}_\delta, \mathbf{R}^3), \tag{11}$$

où $a_{iji'j'} = \lambda\delta_{ij}\delta_{i'j'} + \mu(\delta_{ii'}\delta_{jj'} + \delta_{ij'}\delta_{ji'})$. Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau. Les plaques $\Omega_{l,\delta}$ sont uniquement soumises à des forces appliquées de volume (par souci de simplification) vérifiant

$$F_\delta^{(l)}(x) = \delta f_I^{(l)}(\hat{x}^{(l)}) + f_E^{(l)}(\hat{x}^{(l)}), \quad f_I \in L^2(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3),\ f_E \in L^2(\mathcal{S}, \mathbf{R}^3). \tag{12}$$

De plus, f_E vérifie la condition d'orthogonalité $\int_\mathcal{S} f_E \cdot V = 0$, pour tout $V \in D_I$. On a alors l'estimation $\mathcal{E}(u_\delta, \mathcal{S}_\delta) \leqslant C\delta$. On peut maintenant mettre en place le programme présenté au Paragraphe 3 afin d'obtenir les convergences (10).

Théorème 7. *Le déplacement extensionnel U_E est la solution du problème variationnel*

$$\frac{E}{1-\nu^2}\sum_{l=1}^N \int_{\omega_l} \left[(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(U_E^{(l)})\gamma_{\alpha\beta}(V^{(l)}) + \nu\gamma_{\alpha\alpha}(U_E^{(l)})\gamma_{\beta\beta}(V^{(l)})\right] = \int_\mathcal{S} f_E \cdot V, \quad \forall V \in D_E, \tag{13}$$

où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson. Le déplacement inextensionnel U_I est la solution du problème variationnel

$$\frac{E}{3(1-\nu^2)}\sum_{l=1}^N \int_{\omega_l} \left[(1-\nu)\frac{\partial^2 U_{I,3}^{(l)}}{\partial x_\alpha^{(l)}\partial x_\beta^{(l)}}\frac{\partial^2 V_3^{(l)}}{\partial x_\alpha^{(l)}\partial x_\beta^{(l)}} + \nu\Delta U_{I,3}^{(l)}\Delta V_3^{(l)}\right] = \int_\mathcal{S} f_I \cdot V, \quad \forall V \in \mathcal{D}_I. \tag{14}$$

Références

[1] G. Griso, Asymptotic behavior of a family of curved rods, to appear.
[2] G. Griso, Asymptotic behavior of structures made of curved rods, to appear.
[3] H. Le Dret, Modeling of a folded plate, Comput. Mech. 5 (1990) 401–416.