Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 29–34
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Modules de Hodge sur les variétés de Shimura, et leur dégénérescence dans la compactification de Baily–Borel ☆

Hodge modules on Shimura varieties, and their degeneration in the Baily–Borel compactification

José I. Burgos [a], Jörg Wildeshaus [b]

[a] *Departament d'Algebra i Geometria, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, Barcelone, Espagne*
[b] *Institut Galilée, Université Paris 13, avenue Jean-Baptiste Clément, Villetaneuse, France*

Reçu le 19 septembre 2002 ; accepté le 19 novembre 2002

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Ce travail concerne la dégénérescence des variations de structure de Hodge sur les variétés de Shimura, construites par des représentations algébriques. Le résultat principal exprime cette dégénérescence en termes de cohomologie de Hochschild, et de cohomologie abstraite des groupes. Ce résultat est l'analogue, en théorie de Hodge, du théorème de Pink sur la dégénérescence des faisceaux ℓ-adiques [Math. Ann. 292 (1992) 197–240]. ***Pour citer cet article : J.I. Burgos, J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We study the degeneration of variations of Hodge structure on Shimura varieties, which are given by algebraic representations. Our main result expresses this degeneration in terms of Hochschild, and abstract group cohomology. It is the Hodge theoretic analogue of Pink's theorem on degeneration of ℓ-adic sheaves [Math. Ann. 292 (1992) 197–240]. ***To cite this article: J.I. Burgos, J. Wildeshaus, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

We consider the Baily–Borel compactification of a Shimura variety $j : M \hookrightarrow M^*$. The boundary $M^* - M$ has a natural stratification. Each stratum $i : M_1 \hookrightarrow M^*$ is itself (a quotient by the action of a finite group of) a Shimura

☆ Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue sur demande.
Adresses e-mail : burgos@mat.ub.es (J.I. Burgos), wildesh@math.univ-paris13.fr (J. Wildeshaus).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(02)00018-3

variety. Saito's theory of mixed algebraic Hodge modules [9] comes equipped with the formalism of Grothendieck's functors. In particular, there is a functor i^*j_* from the bounded derived category of Hodge modules on M to that of Hodge modules on M_1.

The objective of the present article is a formula for i^*j_* on those (complexes of) Hodge modules coming about via the canonical construction, denoted μ: the Shimura variety M is associated to a reductive group G over $\mathbb{Q}$, and any algebraic representation $\mathbb{V}$ of G gives rise to a Hodge module $\mu(\mathbb{V})$ on M. Let G_1 be the group belonging to M_1; it is the maximal reductive quotient P_1/W_1 of a certain subgroup P_1 of G. The topological inertia group of M_1 in M is an extension of an arithmetic group $\overline{H}_C$ by a lattice in $W_1(\mathbb{Q})$.

Our main result Theorem 3.5 expresses $i^*j_* \circ \mu$ as a composition of Hochschild cohomology of W_1, abstract cohomology of $\overline{H}_C$, and the canonical construction on M_1. It completes results of Harder and of Looijenga–Rapoport [4,6]. It induces a comparison statement on the level of singular cohomology of M_1, which is equivalent to one of the main results of [5]. Theorem 3.5 is the Hodge-theoretic analogue of the main result of [8].

One comment about the statement of our main result: because of the nature of the canonical construction, it is necessary for abstract cohomology of $\overline{H}_C$ to map algebraic representations to algebraic representations. We found it most natural to develop a formalism of group cohomology "in Abelian categories", which on the one hand applies to a sufficiently general situation, and on the other hand is compatible with usual group cohomology "in the category of $\mathbb{Z}$-modules".

1. Notations et conventions

Les variétés de Shimura sont définies sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Par définition, les représentations algébriques d'un groupe algébrique sont de dimension finie. Dans la Section 3, on fera usage du langage et des notations de [7]. On notera $\mathbb{A}_f$ les adèles rationnels et finis. Pour toute action d'un groupe G sur un espace X, on notera $\mathrm{Cent}_G X$ le noyau de cette action. Si Y est un sous-espace de X, on écrira alors $\mathrm{Stab}_G Y$ pour le sous-groupe de G stabilisant Y.

2. Sur le formalisme de cohomologie des groupes

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et H un groupe. On notera H-$\mathcal{A}$ la catégorie des objets de $\mathcal{A}$ munis d'une action (à gauche) de H, et $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ la pro-catégorie de $\mathcal{A}$. La catégorie H-$\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ est donc celle des pro-objets de $\mathcal{A}$ munis d'une action de H. Pour $\gamma \in H$, on notera par la même lettre γ les automorphismes des objets de H-$\mathcal{A}$, donnés par l'action de H. Notons enfin e l'élément neutre de H.

Définition 2.1. Le *foncteur des points fixes*

$$\Gamma(H, \bullet) : H\text{-}\mathrm{Pro}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Pro}(\mathcal{A})$$

est défini par $A \mapsto \bigcap_{\gamma \in H} \mathrm{Ker}(e - \gamma)$.

En général, l'image de H-$\mathcal{A}$ sous $\Gamma(H, \bullet)$ n'est pas contenue dans $\mathcal{A}$, sauf en présence d'hypothèses supplémentaires sur H ou sur $\mathcal{A}$. Exemples : H est de type fini, ou $\mathcal{A}$ est artinienne, ou $\mathcal{A}$ admet des produits arbitraires.

Définition 2.2. Soit $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne. On note Id l'identité de $\mathcal{B}$. Un foncteur exact $C : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{Id} \to C$ est dit *foncteur de résolution* si, pour tout $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, le morphisme $B \to C(B)$ est un monomorphisme.

A partir d'un foncteur de résolution $C:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$, on construit la *$C$-résolution $C^*(B)$* de tout objet B de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
&C^0(B) := C(B),\\
&K_C^1(B) := \operatorname{Coker}\bigl(B\to C(B)\bigr),\\
&C^i(B) := C\bigl(K_C^i\bigr),\quad i\geqslant 1,\\
&K_C^{i+1}(B) := \operatorname{Coker}\bigl(K_C^i(B)\to C^i(B)\bigr),\quad i\geqslant 1.
\end{aligned}$$

Théorème 2.3. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ deux catégories abéliennes, et $F:\mathcal{B}\to\mathcal{E}$ un foncteur additif, covariant, et exact à gauche. Soit $C:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ un foncteur de résolution, tel que la composition $F\circ C$ soit exacte. Alors le foncteur F est dérivable à droite* [3, Définition 1.2.1(iii)]. *Plus précisément, le foncteur des catégories homotopiques $F\circ C^*:K^+(\mathcal{B})\to K^+(\mathcal{E})$ descend au niveau des catégories dérivées. Le foncteur induit $D^+(\mathcal{B})\to D^+(\mathcal{E})$ est le foncteur dérivé droit RF de F.*

Pour appliquer ce critère au cas $F=\Gamma(H,\bullet)$, il faut construire un foncteur de résolution :

Définition 2.4. Le *foncteur de résolution associé à H* est le foncteur C_H, défini comme suit : pour tout objet A de H-$\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$, l'objet de $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ sous-jacent à $C_H(A)$ est $\prod_{h\in H}A$. Appelons $p_h:C_H(A)\to A$ la projection sur le facteur h. L'action d'un élément $\gamma\in H$ sur $C_H(A)$ est alors définie par la famille des morphismes $\gamma_h:C_H(A)\to A$, où $\gamma_h:=\gamma\circ p_{\gamma^{-1}h}$.

On a alors :

Théorème 2.5. *Le foncteur $\Gamma(H,\bullet):H\text{-}\mathrm{Pro}(\mathcal{A})\to\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ est dérivable à droite. Son foncteur dérivé droit $R\Gamma(H,\bullet):D^+(H\text{-}\mathrm{Pro}(\mathcal{A}))\to D^+(\mathrm{Pro}(\mathcal{A}))$ est induit par $\Gamma(H,\bullet)\circ C_H^*$.*

Démonstration. Le critère 2.3 est satisfait pour $C=C_H$ et $F=\Gamma(H,\bullet)$, car leur composition est isomorphe au foncteur « oubli » : H-$\mathrm{Pro}(\mathcal{A})\to\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$. □

Une fois l'existence du foncteur $R\Gamma(H,\bullet)$ établie, on démontre que toute résolution du H-module trivial $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}H$-modules libres peut être utilisée pour calculer ce foncteur. Cette observation permet de prouver que certaines conditions de finitude sur les catégories dérivées sont respectées si l'on impose des hypothèses de finitude sur le groupe H.

Rappelons que H est dit *de type FL* si $\mathbb{Z}$ admet une résolution finie

$$0\longrightarrow F_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

par des $\mathbb{Z}H$-modules libres de type fini. Notons que d'après [2, 11.1(c)], un groupe arithmétique net est de type FL.

Théorème 2.6. *Si H est de type FL, alors il existe un foncteur canonique $D^b(H\text{-}\mathcal{A})\to D^b(\mathcal{A})$, également noté $R\Gamma(H,\bullet)$, et un diagramme naturel et commutatif*

$$\begin{tikzcd}
D^b(H\text{-}\mathcal{A}) \arrow[r, "R\Gamma(H,\bullet)"] \arrow[d] & D^b(\mathcal{A}) \arrow[d] \\
D^+(H\text{-}\mathrm{Pro}(\mathcal{A})) \arrow[r, "R\Gamma(H,\bullet)"] & D^+(\mathrm{Pro}(\mathcal{A}))
\end{tikzcd}$$

Notons qu'en général, ce foncteur n'est pas le foncteur dérivé droit de $\Gamma(H,\bullet):H\text{-}\mathcal{A}\to\mathcal{A}$.

3. Énoncé des résultats principaux

Soient $(G, \mathfrak{H})$ des *données de Shimura* pures [7, Definition 2.1], et K un sous-groupe ouvert et compact de $G(\mathbb{A}_f)$. On note $M^K := M^K(G, \mathfrak{H})$ la *variété de Shimura* associée à K ; ses points complexes sont donnés par $G(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{H} \times G(\mathbb{A}_f)/K)$. Soit $(M^K)^*$ la *compactification de Baily–Borel* de M^K [1]. Ses points complexes sont donnés par $G(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{H}^* \times G(\mathbb{A}_f)/K)$, où $\mathfrak{H}^*$ est l'union de $\mathfrak{H}$ et de toutes ses *composantes de bord rationnelles* ; cette union est munie de la topologie de Satake (pour laquelle $\mathfrak{H}$ est un ouvert), et d'une action naturelle de $G(\mathbb{Q})$. La variété $(M^K)^*$ est munie d'une stratification naturelle. Pour décrire les strates, il convient de fixer des données supplémentaires : un sous-groupe parabolique et admissible Q de G [7, Definition 4.5], auquel est canoniquement associé un sous-groupe distingué P_1 de Q [7, 4.7] ; une composante de bord rationnelle $(P_1, \mathfrak{X}_1)$ [7, 4.11] (notons que $(P_1, \mathfrak{X}_1)$ sont des données de Shimura) ; un élément $g \in G(\mathbb{A}_f)$.

On note W_1 le radical unipotent de P_1 (qui est aussi le radical unipotent de Q), et $(G_1, \mathfrak{H}_1)$ le quotient $(P_1, \mathfrak{X}_1)/W_1$ [7, Proposition 2.9]. On pose $K' := gKg^{-1}$, et $K_1 := P_1(\mathbb{A}_f) \cap K'$. On note π la projection de $(P_1, \mathfrak{X}_1)$ sur $(G_1, \mathfrak{H}_1)$. Les points complexes de la variété de Shimura $M^{\pi(K_1)} := M^{\pi(K_1)}(G_1, \mathfrak{H}_1)$ peuvent alors être identifiés à $P_1(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{H}_1 \times P_1(\mathbb{A}_f)/K_1)$. L'application $M^{\pi(K_1)}(\mathbb{C}) \to (M^K)^*(\mathbb{C})$, $[(x, p_1)] \mapsto [(x, p_1 g)]$ provient d'un unique morphisme de variétés algébriques, et son image est une strate de $(M^K)^*$, que l'on appellera M_1^K.

Posons $H_Q := \mathrm{Stab}_{Q(\mathbb{Q})}(\mathfrak{H}_1) \cap P_1(\mathbb{A}_f) \cdot K'$, et $H_C := \mathrm{Cent}_{Q(\mathbb{Q})}(\mathfrak{H}_1) \cap W_1(\mathbb{A}_f) \cdot K'$. Le groupe H_Q agit sur $M^{\pi(K_1)}$. D'après [7, 6.3], cette action se factorise par un quotient fini Δ de H_Q. Le quotient par cette action est égal à M_1^K.

Posons encore $\overline{H}_Q := H_Q/W_1(\mathbb{Q})$, et $\overline{H}_C := H_C/W_1(\mathbb{Q})$. Pour identifier Δ, et la nature de son action sur $M^{\pi(K_1)}$, on ajoutera deux hypothèses : que le groupe K soit *net* (voir par exemple [7, 0.6]), et que la composante connexe neutre du centre de G soit, à isogénie près, le produit d'un $\mathbb{Q}$-tore scindé et d'un tore T de type compact (c'est-à-dire $T(\mathbb{R})$ est compact).

Avec ces hypothèses, on peut démontrer :

Proposition 3.1. (a) *Le groupe $\overline{H}_C$ centralise G_1.* (b) *On a $P_1(\mathbb{Q}) \cap H_C = W_1(\mathbb{Q})$.* (c) *On a $\Delta = H_Q/P_1(\mathbb{Q})H_C$, et ce groupe agit librement sur $M^{\pi(K_1)}$.*

On fixe les hypothèses de 3.1, et on considère la situation $M^K \overset{j}{\hookrightarrow} (M^K)^* \overset{i}{\hookleftarrow} M_1^K$. Le formalisme de Saito [9] donne un foncteur $i^* j_*$ entre les catégories dérivées bornées des *modules de Hodge algébriques* respectivement sur M^K et sur M_1^K. Soit F un sous-corps de $\mathbb{R}$. Par la définition même des données de Shimura, il existe un foncteur tensoriel qui associe à une F-représentation algébrique $\mathbb{V}$ de G une variation de structure de Hodge $\mu(\mathbb{V})$ sur $\mathfrak{H}$ [7, 1.18]. Celle-ci descend au niveau de $M^K(\mathbb{C})$, donnant ainsi lieu à une variation $\mu_K(\mathbb{V})$. On appelle le foncteur μ_K la *construction canonique* des variations à partir des représentations de G. Puisque le caractère de poids associé à $(G, \mathfrak{H})$ est central [7, Definition 2.1(iii)], la variation $\mu_K(\mathbb{V})$ est la somme directe de variations pures. D'après [10, Theorem (4.9)], l'image de μ_K est contenue dans la catégorie $\mathbf{Var}_F M^K$ des variations *admissibles*, et donc d'après [9, Theorem 3.27], dans la catégorie $\mathbf{MHM}_F M^K$ des modules de Hodge algébriques. Le foncteur μ_K est exact ; il induit donc un foncteur de catégories dérivées :

$$\mu_K : D^b(\mathbf{Rep}_F G) \to D^b(\mathbf{MHM}_F M^K).$$

Définition 3.2. (a) La catégorie $(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q)$ est définie comme suit : les objets sont les paires $(\mathbb{V}_1, (\rho_\gamma)_{\gamma \in \overline{H}_Q})$, où $\mathbb{V}_1 \in \mathbf{Rep}_F G_1$, et $(\rho_\gamma)_\gamma$ est une famille d'isomorphismes $(\mathrm{int}\,\gamma)^* \mathbb{V}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}_1$ dans $\mathbf{Rep}_F G_1$ ($\mathrm{int}\,\gamma :=$ la conjugation par γ), telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) ρ_γ est égal à $v \mapsto \gamma^{-1}(v)$ si $\gamma \in G_1(\mathbb{Q})$,
(ii) la relation de cocycle est satisfaite.

Les morphismes de $(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q)$ sont définis de manière évidente.

(b) La catégorie $(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C)$ est la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q)$ dont les objets sont les $(\mathbb{V}_1, (\rho_\gamma)_{\gamma \in \overline{H}_Q})$ pour lesquels ρ_γ est l'identité si $\gamma \in \overline{H}_C$.

On définit également des variantes de 3.2 au niveau des pro-catégories. Notons que d'après la Proposition 3.1(a), on a $(\operatorname{int}\gamma)^*\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_1$ pour tout $\mathbb{V}_1 \in \operatorname{Pro}(\mathbf{Rep}_F G_1)$ et $\gamma \in \overline{H}_C$.

Par équivariance, le foncteur $\mu_{\pi(K_1)}$ s'étend en un foncteur tensoriel exact entre la catégorie $(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C)$ et celle des objets de $\mathbf{Var}_F M^{\pi(K_1)}$ munis d'une action du groupe fini Δ. Selon la Proposition 3.1(c), cette catégorie est canoniquement équivalente à $\mathbf{Var}_F M_1^K$, d'où un foncteur tensoriel $(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C) \to \mathbf{Var}_F M_1^K \subset \mathbf{MHM}_F M_1^K$, également noté $\mu_{\pi(K_1)}$. Ce foncteur est exact ; il induit donc un foncteur $\mu_{\pi(K_1)} : D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C) \to D^b(\mathbf{MHM}_F M_1^K)$.

Définition 3.3. On note $\Gamma(\overline{H}_C, \bullet) : (\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q) \to (\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C)$ le foncteur qui associe à $\mathbb{V}_1 = (\mathbb{V}_1, (\rho_\gamma)_\gamma)$ le plus grand sous-objet $\mathbb{V}_1'$ sur lequel les ρ_γ, $\gamma \in \overline{H}_C$, agissent trivialement.

On applique alors des variantes des Théorèmes 2.5 et 2.6 (pour des catégories abéliennes munies d'une action non-triviale d'un groupe, et pour la cohomologie d'un sous-groupe distingué de ce groupe), pour prouver que le foncteur dérivé droit au niveau des pro-catégories existe :

$$R\Gamma(\overline{H}_C, \bullet) : D^+\big(\operatorname{Pro}(\mathbf{Rep}_F G_1), \overline{H}_Q\big) \to D^+\big(\operatorname{Pro}(\mathbf{Rep}_F G_1), \overline{H}_Q/\overline{H}_C\big),$$

et qu'il respecte les sous-catégories $D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, ?) : R\Gamma(\overline{H}_C, \bullet) : D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q) \to D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C)$.

Définition 3.4. On note $\Gamma(W_1, \bullet) : \mathbf{Rep}_F Q \to (\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q)$ le foncteur qui associe à une représentation $\mathbb{X}$ de Q ses invariants sous W_1.

Le foncteur dérivé droit $R\Gamma(W_1, \bullet) : D^b(\mathbf{Rep}_F Q) \to D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q)$ existe. On a alors :

Théorème 3.5. *Notons* $\operatorname{Res}_Q^G : D^b(\mathbf{Rep}_F G) \to D^b(\mathbf{Rep}_F Q)$ *la restriction, et c la codimension de M_1^K dans $(M^K)^*$. Il existe alors un diagramme naturel et commutatif*

$$\begin{tikzcd}
D^b(\mathbf{Rep}_F G) \arrow[r, "\mu_K"] \arrow[d, "\operatorname{Res}_Q^G"'] & D^b(\mathbf{MHM}_F M^K) \arrow[ddd, "i^* j_*[-c]"] \\
D^b(\mathbf{Rep}_F Q) \arrow[d, "R\Gamma(W_1, \bullet)"'] & \\
D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q) \arrow[d, "R\Gamma(\overline{H}_C, \bullet)"'] & \\
D^b(\mathbf{Rep}_F G_1, \overline{H}_Q/\overline{H}_C) \arrow[r, "\mu_{\pi(K_1)}"] & D^b(\mathbf{MHM}_F M_1^K)
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, il existe une suite spectrale pour tout $\mathbb{V}^\bullet \in D^b(\mathbf{Rep}_F G)$, qui converge vers la cohomologie de $i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet)$, et qui a pour termes initiaux $\mu_{\pi(K_1)} \circ H^p(\overline{H}_C, H^q(W_1, \operatorname{Res}_Q^G \mathbb{V}^\bullet))$. En utilisant une observation de Harder [4, démonstration de 1.6.2, Satz 1], on démontre que cette suite spectrale dégénère, et qu'elle est canoniquement scindée ; d'où le résultat suivant, qui est l'analogue, en théorie de Hodge, de [8, Théorème 5.3.1] :

Théorème 3.6. *Il existe un isomorphisme canonique et fonctoriel pour tout* $\mathbb{V}^\bullet \in D^b(\mathbf{Rep}_F G)$

$$\mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n+c} \mu_{\pi(K_1)} \circ H^p\big(\overline{H}_C, H^q\big(W_1, \operatorname{Res}_Q^G \mathbb{V}^\bullet\big)\big),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

En utilisant la définition de la cohomologie $H^*(\overline{H}_C, \bullet)$ (Théorème 2.5), on déduit du Théorème 3.6 :

Corollaire 3.7. *Soient* $\mathbb{V}^\bullet \in D^b(\mathbf{Rep}_F G)$, *et* $n \in \mathbb{Z}$.

(a) *La variation admissible* $\mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet)$ *sur* M_1^K *est la somme directe de variations pures. En particulier, elle est semi-simple.*
(b) *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *on a un isomorphisme canonique et fonctoriel*

$$\mathrm{Gr}_k^W \mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n+c} \mu_{\pi(K_1)} \circ H^p\big(\overline{H}_C, \mathrm{Gr}_k^W H^q\big(W_1, \mathrm{Res}_Q^G \mathbb{V}^\bullet\big)\big).$$

(c) *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *tout type de Hodge apparaissant dans* $\mathrm{Gr}_k^W \mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet)$, *apparaît déjà dans un des* $\mathrm{Gr}_k^W H^q(W_1, \mathrm{Res}_Q^G \mathbb{V}^\bullet)$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \leqslant n + c$.

Une partie des informations contenues dans 3.6 et de 3.7 est connue : le scindage de la filtration par le poids de $\mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet)$ est démontré dans [6, Proposition (6.4)]. D'après le Corollaire 3.7(b), le système local sous-jacent à $\mathrm{Gr}_k^W \mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet)$ est la somme directe des systèmes locaux sous-jacents aux $\mu_{\pi(K_1)} \circ H^p(\overline{H}_C, \mathrm{Gr}_k^W H^q(W_1, \mathrm{Res}_Q^G \mathbb{V}^\bullet))$, pour $p + q = n + c$. Ce résultat peut être obtenu, à l'aide de [4, démonstration de 1.6.2, Satz 1], par [6, Corollaire (6.6)].

La cohomologie $H^n(M_1^K, i^* j_* \circ \mu_K(\mathbb{V}^\bullet))$ coïncide avec la « deleted neighbourhood cohomology » (de certaines strates dans une compactification toroïdale de M^K) de [5] (comme on le voit par changement de base propre pour la projection de cette compactification sur $(M^K)^*$). En appliquant le foncteur « cohomologie singulière » à l'isomorphisme du Théorème 3.6, on obtient un résultat qui équivaut à [5, Théorème (5.6.10)].

Remerciements

Les auteurs sont heureux de remercier A. Abbes, F. Guillén, L. Illusie, A. Mokrane, B.C. Ngo, H. Padieu, et J. Tilouine pour d'utiles discussions dans la préparation de ce texte. Le premier auteur (J.I. B.) a bénéficié du soutien financier d'une bourse DGI BFM2000-0799-C02-01.

Références

[1] W.L. Baily, A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. 84 (1966) 442–528.
[2] A. Borel, J.-P. Serre, Corners and arithmetic groups, Comment. Math. Helv. 48 (1973) 436–491.
[3] P. Deligne, Cohomologie à supports propres, dans: $\mathrm{SGA4}_{\mathrm{III}}$, in: Lecture Notes in Math., Vol. 305, Springer-Verlag, 1973, pp. 250–480.
[4] G. Harder, Eisenstein-Kohomologie arithmetischer Gruppen: Allgemeine Aspekte, Prépublication, Bonn, 1986.
[5] M. Harris, S. Zucker, Boundary cohomology of Shimura varieties II. Hodge theory at the boundary, Invent. Math. 116 (1994) 243–307.
[6] E. Looijenga, M. Rapoport, Weights in the local cohomology of a Baily–Borel compactification, in: J.A. Carlson, C.H. Clemens, D.R. Morrison (Eds.), Complex Geometry and Lie Theory, in: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 53, American Mathematical Society, 1991, pp. 223–260.
[7] R. Pink, Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties, in: Bonner Math. Schriften, Vol. 209, University Bonn, 1990.
[8] R. Pink, On ℓ-adic sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily–Borel compactification, Math. Ann. 292 (1992) 197–240.
[9] M. Saito, Mixed Hodge modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990) 221–333.
[10] W. Schmid, Variations of Hodge structure: the singularities of the period mapping, Invent. Math. 22 (1973) 211–319.