Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 57–62

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Probabilités

Diffraction et mesure de Palm des processus ponctuels

Diffraction and Palm measure of point processes

Jean-Baptiste Gouéré

LaPCS, Université Claude Bernard Lyon I, bâtiment recherche [B], 50, avenue Tony-Garnier, Domaine de Gerland, 69366 Lyon cedex 07, France

Reçu le 8 octobre 2002 ; accepté le 5 novembre 2002

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

En faisant appel à la notion de mesure de Palm, nous établissons l'existence de la mesure de diffraction pour tout processus ponctuel stationnaire et ergodique. Nous obtenons des caractérisations précises de ces mesures dans le cas de processus particuliers : sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$, ensembles obtenus par la méthode « cut-and-project ». ***Pour citer cet article : J.-B. Gouéré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Using the notion of Palm measure, we prove the existence of the diffraction measure of all stationary and ergodic point processes. We get precise expressions of those measures in the case of specific processes: stochastic subsets of $\mathbb{Z}^d$, sets obtained by the "cut-and-project" method. ***To cite this article: J.-B. Gouéré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Let S be a locally finite subset of $\mathbb{R}^d$. Its autocorrelation is defined as the limit as $R \to \infty$ in the vague topology, if it exists, of the measures $\gamma_R = \frac{1}{|B_R|}\sum_{x,y\in S\cap B_R}\delta_{x-y}$, where B_R is the ball of radius R centered at 0 and $|B_R|$ its volume. If it exists, the autocorrelation γ is positive, tempered and of positive type. Its Fourier transform is therefore a positive measure which is called the diffraction measure of S.

Let χ be a stationary, ergodic and square-integrable point process. We prove that χ admits a.s. an autocorrelation which coincides with a classical object in stochastic geometry: the intensity measure of the Palm measure of χ.

Then we consider the stochastic subsets of $\mathbb{Z}^d$ given by the times at which a stationary and ergodic process $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ goes through a point. Let μ be the spectral measure of X. We prove that:

Adresse e-mail : jbgouere@univ-lyon1.fr (J.-B. Gouéré).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(02)00029-8

(1) The process χ admits a.s. an autocorrelation given by $\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E(X_0X_k)\delta_k$;
(2) We have $\hat{\gamma} = \mu_p$ where μ_p is the $\mathbb{Z}^d$-periodic measure associated with μ.

This enables us to give examples of diffraction measures with nontrivial singular parts.

Finally, we study the "cut-and-project" method. Let E and F be two linear subspaces of $\mathbb{R}^d$ such that $\mathbb{R}^d = E \oplus F$. In order to simplify the notations, assume that E and F are orthogonal. If $x \in \mathbb{R}^d$ we note $x = x_E + x_F$ with obvious conventions. Let W be a bounded Borel set of F. Usually, the "cut-ant-project" method is used to turn a lattice into a quasi-periodic set by projecting orthogonally on E the points lying in the band $E \times W$. We use it to turn a point process χ on $\mathbb{R}^d$ into another process χ' on E. Assume that χ is stationary, square-integrable and ergodic under the action of the translations $(T_t)_{t\in E}$. In particular, χ admits an autocorrelation γ. Using the link between the autocorrelation and the Palm measure, we prove that:

(1) The process χ' admits a.s. an autocorrelation γ';
(2) The autocorrelation is given by $\gamma'(C) = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(\mathrm{d}x) 1_W * 1_{-W}(x_F) 1_C(x_E)$;
(3) We have $\hat{\gamma}'(C) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\gamma}(\mathrm{d}x) |\widehat{1_W}|^2(x_F) 1_C(x_E),\ C \in \mathcal{B}(E)$.

As an example, we apply this construction to stochastic subsets of $\mathbb{Z}^d$.

1. Introduction

D'un point de vue physique, la diffraction par un matériau des rayons X permet d'étudier sa structure microscopique. Les phénomènes d'interférences entre les rayons diffractés par les différents atomes sont en effet reliés aux positions relatives de ces atomes. Si les atomes sont disposés selon un réseau comme c'est le cas pour un cristal, alors le motif de diffraction est constitué de points lumineux isolés distribués eux aussi selon un réseau. Réciproquement, la présence de points isolés dans le motif de diffraction suggère que les atomes sont relativement ordonnés, mais la nature précise de cet ordre n'est pas comprise. Plus généralement, la compréhension du lien qui relie la nature du motif de diffraction avec la structure microscopique du matériau reste très incomplète. La découverte en 1982 par Shechtman et al. [18] des quasicristaux (arrangements non périodiques d'atomes dont le motif de diffraction comporte des points isolés) a relancé l'intérêt porté à ce problème.

Rappelons le formalisme mathématique de la diffraction [8]. On se donne χ un sous-ensemble localement fini de $\mathbb{R}^d$. On lui associe une mesure γ_R par :

$$\gamma_R := \frac{1}{|B_R|} \sum_{x,y\in\chi\cap B_R} \delta_{y-x} = \frac{1}{|B_R|} \left(\sum_{x\in\chi\cap B_R} \delta_x \right) * \left(\sum_{x\in\chi\cap B_R} \delta_{-x} \right), \tag{1}$$

où $|B_R|$ désigne la mesure de Lebesgue canonique de la boule B_R centrée en l'origine et de rayon $R > 0$ et où δ_x est la mesure de Dirac au point x. La transformée de Fourier $\widehat{\gamma_R}(t)$ est l'intensité lumineuse diffractée dans la direction t par un matériau dont les centres des atomes sont les points de $\chi \cap B_R$. Lorsqu'elle existe, la mesure limite $\gamma = \lim_{R\to\infty} \gamma_R$, prise au sens de la topologie vague, est désignée par le terme d'autocorrélation de χ. Cette mesure est tempérée et sa transformée de Fourier $\hat{\gamma}$ est une mesure positive appelée mesure de diffraction de χ. La notion de « points isolés dans le motif de diffraction » (la présence de Bragg peaks) se traduit mathématiquement comme la non trivialité de la composante atomique de la mesure $\hat{\gamma}$.

Récemment, des recherches ont été entreprises en prenant pour χ des processus ponctuels particuliers [2,3,7]. Essentiellement trois modèles ont été jusqu'à présent étudiés : le processus est obtenu en supprimant aléatoirement des points d'un ensemble déterministe [2,3] ; le processus est obtenu en perturbant la position des points d'un ensemble déterministe [7] ; le processus est associé à un pavage aléatoire [2,4,6,10].

Dans cette Note, nous démontrons que, lorsque le processus ponctuel χ est ergodique sous l'action des translations, alors l'autocorrélation existe toujours et coïncide avec un objet classique en géométrie aléatoire, la mesure d'intensité de la mesure de Palm de χ.

Nous considérons ensuite les sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$ obtenues en prenant les instants de passages en un point d'un processus stationnaire et ergodique $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Nous montrons que ces sous-ensembles admettent p.s. une autocorrélation. Nous prouvons la périodicité de leur mesure de diffraction (voir [1] pour un résultat analogue dans le cas où χ est déterministe et admet une autocorrélation) que nous exprimons en fonction de la mesure spectrale de X. Cela nous permet de construire des exemples d'ensembles dont la mesure de diffraction comporte une composante singulière.

Nous reprenons enfin la méthode « cut-and-project » qui est un procédé très populaire [13,14] d'obtention d'ensembles presque-périodiques χ' à partir d'ensembles périodiques χ. Nous étudions la situation plus générale où l'ensemble χ est un processus ponctuel. En exploitant le lien que nous avons établi entre la mesure de Palm d'un processus et sa mesure d'autocorrélation, nous exprimons la mesure de diffraction de χ' en fonction de celle de χ. A titre d'exemple nous appliquons cette construction aux sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$.

2. Autocorrélation et mesure de Palm

Soit $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des sous-ensembles localement finis de $\mathbb{R}^d$. A tout borélien borné A on associe l'application $N_A : \mathcal{M}_\sigma \to \mathbb{N}$ définie par $N_A(\phi) = \operatorname{card}(A \cap \phi)$. On munit $\mathcal{M}_\sigma$ de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par ces applications. Un processus ponctuel [12,16] est une application mesurable χ, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeur dans $(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$. Un processus ponctuel est dit intégrable (resp. de carré intégrable) si les variables aléatoires N_A le sont pour tout compact A. Un processus ponctuel est dit stationnaire si sa loi est invariante par les translations $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$. Soit χ un processus stationnaire et intégrable. On munit classiquement $(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$ de la mesure de Palm $\widetilde{P}$ [12], définie par

$$\widetilde{P}(F) := \frac{1}{|B|} E\left[\sum_{x\in\phi\cap B} 1_F(\phi - x)\right], \quad F \in \mathcal{A},$$

où B est un borélien fixé de $\mathbb{R}^d$ de mesure $|B|$ finie et non nulle. Cette définition est indépendante du choix de B. A toute mesure m sur $(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$ on associe sa mesure d'intensité $I(m)$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ définie par

$$I(m)(A) = \int \operatorname{card}(\phi \cap A)\, \mathrm{d}m(\phi), \quad A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big),$$

où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne les boréliens de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2.1. *Considérons un processus ponctuel χ stationnaire, ergodique et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\widetilde{P}$ sa mesure de Palm et $I(\widetilde{P})$ l'intensité de cette mesure. Cette dernière mesure est localement finie. On a alors pour tout borélien borné C de $\mathbb{R}^d$:*

$$\lim_{R\to\infty} \gamma_R(C) = I\big(\widetilde{P}\big)(C) \quad p.s.$$

En particulier, γ_R converge presque sûrement vers $I(\widetilde{P})$ pour la topologie vague.

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le théorème ergodique de Wiener [20].

Exemple. Considérons un processus de Poisson ponctuel χ sur $\mathbb{R}^d$ admettant pour mesure d'intensité la mesure de Lebesgue canonique [12]. Les hypothèses du Théorème 2.1 sont classiquement vérifiées et on sait [12] que la mesure de Palm de χ coïncide avec la loi du processus $\chi_0 := \chi \cup \{0\}$. Il en découle immédiatement que le processus χ admet p.s. une mesure d'autocorrélation γ vérifiant $\gamma = \hat{\gamma} = \delta_0 + \mathrm{d}x$.

3. Sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$

3.1. Généralités

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un processus stationnaire ergodique et à valeurs dans $\{0,1\}$. Désignons par μ sa mesure spectrale. On considère le processus $\chi = \{k \in \mathbb{Z}^d\colon\ X_k = 1\}$.

Théorème 3.1.

(1) *Le processus χ admet presque sûrement une autocorrélation γ. Elle vérifie $\gamma := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E(X_0X_k)\,\delta_k$.*
(2) *On a $\hat{\gamma} = \mu_p$ où μ_p est la mesure $\mathbb{Z}^d$-périodique associée à μ ($\mu_p(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mu(\cdot - k)$).*

Remarque. Soit U une variable aléatoire indépendante de X et de loi uniforme sur $[0,1[^d$. On construit une version $\mathbb{R}^d$-stationarisée de χ en posant $\varphi = s(U,X)$ où s est la fonction de $[0,1[^d \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ dans $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$ définie par $s(u,x) = u + \{k \in \mathbb{Z}^d\colon\ x_k = 1\}$. Le résultat du Théorème 3.1 est trivialement vérifié pour le processus φ.

3.2. Un exemple de mesure singulière

Soit ν une probabilité symétrique sur $\mathbb{R}$. Il existe un processus gaussien réel $(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ centré et de covariance $E(Y_nY_{n+k}) = \hat{\nu}(k)$. Ce processus est stationnaire. Il est également ergodique si la mesure ν est sans atomes, ce que nous supposerons dans la suite ([5], Chapitre 14, §2, Théorème 1). Considérons alors le processus $X_k = 1_{\mathbb{R}_+}(Y_k),\ k \in \mathbb{Z}$. Il est également stationnaire et ergodique. De plus, on a $E(X_0X_k) = f(\hat{\nu}(k))$ avec

$$f(x) := \frac{1}{2\pi}\arcsin(x) + \frac{1}{4} = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k, \tag{2}$$

les coefficients a_k étant positifs. La mesure $f(\nu) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\nu^{*k}$ est la mesure spectrale de X. Avec le Théorème 3.1 on obtient alors le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soit ν une probabilité symétrique et sans atomes sur $\mathbb{R}$. Posons $\mu = f(\nu)$ où f est définie sur $[-1,1]$ par (2). Il existe alors un processus ponctuel admettant presque sûrement la mesure μ_p pour mesure de diffraction (μ_p est la mesure $\mathbb{Z}^p$-périodique associée à μ).*

Exemple. En prenant pour ν la loi de la série aléatoire $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^n}X_n$ où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.i.i.d. de Bernouilli symétriques, on obtient un processus ponctuel admettant une mesure de diffraction de la forme $\frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k + m$ où $m = [(f - 1/4)(\nu)]_p$ est une mesure purement singulière 1-périodique.

4. Ensembles obtenus par la méthode « cut-and-project »

4.1. Principe

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^d$ et donnons-nous deux sous-espaces supplémentaires E et F. Notons p_E (resp. p_F) la projection sur E parallèlement à F (resp. sur F parallèlement à E). Notons $x_E^\perp$ et $x_F^\perp$ les projections orthogonales de x sur E et F. Considérons un borélien borné fixé $W \subset F$. Soit ϕ un processus ponctuel stationnaire et de carré intégrable dans $\mathbb{R}^d$. On le suppose ergodique sous l'action des translations $(T_t)_{t\in E}$. On définit un nouveau processus ponctuel χ dans E par $\chi = \pi(\phi)$ où π est l'application de $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{M}_\sigma(E)$ définie par

$$\pi(\phi) = p_E\big(\phi \cap (E \times W)\big). \tag{3}$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$\text{Deux points distincts de } \phi \cap (E \times W) \text{ ont une image distincte par } p_E \text{ (p.s.).} \tag{4}$$

Théorème 4.1. *Notons λ la restriction à W de la mesure de Lebesgue canonique de F et désignons par $\widetilde{Q}$ la mesure de Palm de ϕ. Soit C_E (resp. C_F) un borélien de mesure 1 de E (resp. F). Notons α le volume de $C_E + C_F$. Alors :*

(1) *Le processus χ est stationnaire, ergodique et de carré intégrable.*
(2) *La mesure de Palm de χ coïncide avec l'image de la mesure $\alpha\lambda \otimes \widetilde{Q}$ par l'application*

$$f : \begin{cases} W \times \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{M}_\sigma(E), \\ (w, \tilde{\phi}) \mapsto p_E\big((w + \tilde{\phi}) \cap (E \times W)\big) = \pi(w + \tilde{\phi}). \end{cases} \tag{5}$$

(3) *L'intensité de la mesure de Palm est la mesure γ sur E définie par*

$$\gamma(C) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} I\big(\widetilde{Q}\big)(\mathrm{d}x)\, \psi\big(p_F(x)\big) 1_C\big(p_E(x)\big), \quad C \in \mathcal{B}(E), \tag{6}$$

où ψ est la fonction de F dans $\mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = 1_W * 1_{-W}(x)$.
(4) *La transformée de Fourier de γ est de la forme*

$$\hat{\gamma}(C) = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{I(\widetilde{Q})}(\mathrm{d}x)\, \hat{\psi}\big(x_F^\perp\big) 1_C\big(x_E^\perp\big), \quad C \in \mathcal{B}(E), \tag{7}$$

où $\widehat{I(\widetilde{Q})}$ est la transformée de Fourier de $I(\widetilde{Q})$.

Remarque. Quitte à adopter le formalisme des processus ponctuels marqués [9] (qui autorise la « présence » de plusieurs points au même endroit), on peut éviter le recours à l'hypothèse (4). Cela ne modifie ni la preuve ni le résultat.

On en déduit immédiatement à l'aide du Théorème 2.1 le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Le processus χ admet p.s. les mesures d'autocorrélation et de diffraction respectivement décrites par* (6) *et* (7).

4.2. Applications aux sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$

On applique la construction « cut-and-project » au processus $\varphi = s(U, X)$ introduit dans la remarque de la Section 3. Le cas particulier où les X_k sont i.i.d. a été étudié dans [3].

Pour appliquer le Théorème 4.1, nous devons vérifier l'ergodicité de φ sous l'action des translations $(T_t)_{t \in E}$. A cet effet nous démontrons que

Proposition 4.3. *Il existe un ensemble négligeable $S \subset S^{d-1}$ tel que φ est ergodique suivant la direction $\mathbb{R}v$ pour tout $v \in S^{d-1} \setminus S$. En dimension* 2 *cet ensemble est dénombrable.*

Dans certains cas particuliers, on peut expliciter S :

Proposition 4.4. *Considérons des processus stationnaires, ergodiques et indépendants $(A_n^i)_{n \in \mathbb{Z}}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, à valeur dans $\{0, 1\}$. Définissons un processus X indexé par $\mathbb{Z}^d$ en posant $X_{n_1, \dots, n_d} = A_{n_1}^1 \cdots A_{n_d}^d$. Ce processus* *est stationnaire et ergodique. Si les processus* A^i *sont faiblement mélangeants* (*ce qui est le cas des processus construits en* 3.2), *alors on peut prendre pour* S *l'ensemble des vecteurs unitaires dont les coordonnées sont liées sur* $\mathbb{Q}$.

Théorème 4.5. *On suppose que* E *contient un vecteur de* $S^{d-1} \setminus S$. *Soit* $\chi = \pi(\varphi)$ *où* π *est définie par* (3). *Le processus* χ *est alors stationnaire ergodique et de carré intégrable. Il admet presque sûrement (avec les notations des Théorèmes* 4.1 *et* 3.1) *une autocorrélation s'exprimant par* $\gamma(C) = \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{\mu}(k)\psi(p_F(k))1_C(p_E(k))$ *et une mesure de diffraction vérifiant* $\hat{\gamma}(C) = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x_F^{\perp})1_C(x_E^{\perp})\mu_p(\mathrm{d}x)$ $(C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Si on prend $X \equiv 1$ alors le processus ponctuel φ est (à une tranlation près) le réseau déterministe $\mathbb{Z}^d$. On peut prendre pour S l'ensemble des vecteurs unitaires liés sur $\mathbb{Q}$ et on retrouve alors avec le Théorème 4.5 les résultats classiques sur les « model-sets » [8,11,15,17,19].

Références

[1] M. Baake, Diffraction of weighted lattice subsets, Preprint, 2002.
[2] M. Baake, M. Höffe, Diffraction of random tilings: some rigorous results, J. Statist. Phys. 99 (1–2) (2000) 216–261.
[3] M. Baake, R.V. Moody, Diffractive point sets with entropy, J. Phys. A 31 (45) (1998) 9023–9039.
[4] R. Burton, R. Pemantle, Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances, Ann. Probab. 21 (3) (1993) 1329–1371.
[5] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinaĭ, Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York, 1982. Translated from Russian by A.B. Sosinskiĭ.
[6] M.E. Fisher, J. Stephenson, Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. II. Dimer correlations and monomers, Phys. Rev. 132 (2) (1963) 1411–1431.
[7] A. Hof, Diffraction by aperiodic structures at high temperatures, J. Phys. A 28 (1) (1995) 57–62.
[8] A. Hof, On diffraction by aperiodic structures, Comm. Math. Phys. 169 (1) (1995) 25–43.
[9] O. Kallenberg, Random Measures, 4th edition, Akademie-Verlag, Berlin, 1986.
[10] R. Kenyon, Local statistics of lattice dimers, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 33 (5) (1997) 591–618.
[11] Y. Meyer, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers, in: Beyond Quasicrystals, Les Houches, 1994, Springer, Berlin, 1995, pp. 3–16.
[12] J. Møller, Lectures on Random Voronoĭ Tessellations, Springer-Verlag, New York, 1994.
[13] R.V. Moody, Meyer sets and their duals, in: The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order, Waterloo, ON, 1995, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997, pp. 403–441.
[14] R.V. Moody, Model sets: a survey, Preprint, 2001.
[15] R.V. Moody, Uniform distribution in model sets, Canadian Math. Bull. 45 (1) (2002) 123–130.
[16] J. Neveu, Processus ponctuels, in: École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, VI-1976, in: Lecture Notes in Math., Vol. 598, Springer-Verlag, Berlin, 1977, pp. 249–445.
[17] M. Schlottmann, Generalized model sets and dynamical systems, in: Directions in Mathematical Quasicrystals, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, pp. 143–159.
[18] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J.W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1951–1953.
[19] B. Solomyak, Spectrum of dynamical systems arising from Delone sets, in: Quasicrystals and Discrete Geometry, Toronto, ON, 1995, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, pp. 265–275.
[20] N. Wiener, The ergodic theorem, Duke Math. 5 (1939) 1–18.