C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 27–30

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur un problème de type elliptique parabolique non linéaire

Stanislas Ouaro, Hamidou Touré

UFR des sciences éxactes et appliquées, Université de Ouagadougou, 03, BP 7021, Ouagadougou 03, Burkina Faso

Reçu et accepté 3 octobre 2001

Note présentée par Haim Brezis.

Résumé Nous étudions l'équation $b(u)_t = a(u, \varphi(u)_x)_x + f$ de type elliptique-parabolique. Utilisant la théorie des équations d'évolution dans L^1, nous établissons des résultats d'existence et d'unicité de « bonnes solutions » du problème de Cauchy associé sous des hypothèses très générales. Avec des hypothèses complémentaires de structure de type Alt–Luckhauss, nous montrons que ces « bonnes solutions » sont solutions faibles. Pour citer cet article : S. Ouaro, H. Touré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 27–30. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On a nonlinear elliptic-parabolic problem

Abstract We study the general equation $b(u)_t = a(u, \varphi(u)_x)_x + f$ of elliptic-parabolic type. Using the theory of evolution equation governed by accretive operator, we establish existence and uniqueness of mild solutions to the associate Cauchy problem, under general assumptions on the data. With additional structural condition of Alt–Luckhauss type, we show that the mild solutions are weak solutions. To cite this article: S. Ouaro, H. Touré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 27–30. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let b and φ be functions of $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ continuous and nondecreasing, in addition b is surjective. Let also $a(k,\xi)$ be a function of $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ continuous, and nondecreasing with respect to ξ, we suppose that a verify a coerciveness assumption

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \inf_{|k|<R} \left|a(k,\xi)\right| = +\infty, \quad \forall R>0. \tag{H1}$$

We first define entropy solution to the stationary problem

$$b(u) - a\big(u, \varphi(u)_x\big)_x = f \quad \text{on } \mathbb{R} \tag{PS}$$

Adresse e-mail : toureh@univ-ouaga.bf (H. Touré).

S1631-073X(02)02198-2/FLA

associated to the evolution problem

$$\begin{cases} b(u)_t = a\big(u, \varphi(u)_x\big)_x + f & \text{in } Q =]0, T[\times\mathbb{R}, \\ b\big(u(0)\big) = v_0 & \text{on } \mathbb{R} \end{cases} \tag{PE}$$

for given f in Q and v_0 on $\mathbb{R}$.

We introduce an L^1 operator A_b associated to (PS). We prove that this operator is accretive in L^1, with dense domain, and verify the range condition. Then using the theory of evolution equation governed by accretive operator in Banach space, we deduce existence and uniqueness of mild solution of the associated Cauchy problem. More precisely, we have the following result:

THEOREM 1. – *Let a, b and φ such that* (H1) *holds for any $f \in \mathrm{L}^1(Q)$, $v_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, then there exists a mild solution u of* (PE) *which is caracterized by*

$$b(u) \in \mathcal{C}\big([0, T]; \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\big), \quad b\big(u(0)\big) = v_0$$

and for any $\xi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, $\xi \geqslant 0$, $b(\hat{u}) \in \mathcal{D}(A_b)$; there exists $\alpha \in \mathrm{L}^\infty(Q)$, $\alpha \in \operatorname{sign}(b(u) - b(\hat{u}))$ a.e. in Q so that

$$\iint_Q \alpha\big\{\big(b(u) - b\big(\hat{u}\big)\big)\xi' + \big(f - A_b b\big(\hat{u}\big)\big)\xi\big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

In addition, we have the comparison principle for $b(u)$. That is, if

$$f \leqslant \hat{f} \quad \text{a.e. on } Q \quad \text{and} \quad v_0 \leqslant \hat{v}_0 \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}, \quad \text{then} \quad b(u) \leqslant b(\hat{u}) \quad \text{a.e. on } Q,$$

where $u, \hat{u}$ are mild solutions of (PE) *with respect to (f, v_0) and $(\hat{f}, \hat{v}_0)$.*

---

1. Introduction

Soient b et φ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues croissantes au sens large, on suppose de plus que b est surjective. Soit d'autre part $a(k, \xi)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, croissante au sens large en ξ et on fait l'hypothèse de coercivité (H1) sur $a(k, \xi)$.

Nous étudions le problème d'évolution (PE) par la théorie des équations d'évolution dans un espace de Banach ; on introduit une notion de « bonne solution » de (PE) (f, v_0) à partir de l'étude dans la première section du problème stationnaire (PS). La seconde section est consacrée à l'étude du problème d'évolution. On fait en particulier le lien avec les solutions faibles sous certaines hypothèses complémentaires sur les données.

2. L'opérateur A_b

DÉFINITION 2. – Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on appelle *solution entropique* de (PS) toute fonction $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(u) \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et il existe $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $h = a(u, \varphi(u)_x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}_0^+\big(b(u) - b(k)\big)\big\{\big(H(k) - h\big)\xi_x + \big(f - b(u)\big)\xi\big\}\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{1}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}_0^+\big(b(k) - b(u)\big)\big\{\big(H(k) - h\big)\xi_x + \big(f - b(u)\big)\xi\big\}\,\mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{2}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi \geqslant 0$, où on a noté $H(k) = a(k, 0)$.

LEMME 3. – *Soient* $f, \hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ *et* $u, \hat{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ *solutions entropiques de* (PS) *correspondant à* f *et* $\hat{f}$ *respectivement, il existe* $\alpha \in \operatorname{sign}^+(b(u) - b(\hat{u}))$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}$ *telle que* :

$$\int_{\mathbb{R}} \big(b(u) - b\big(\hat{u}\big)\big)^+ \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}} \alpha\big(f - \hat{f}\,\big)^+ \,\mathrm{d}x.$$

Ce résultat est à rapprocher des résultats de Bénilan et Touré [3], Bénilan et Wittbold [4], Carrillo [5].

DÉFINITION 4. – A_b est l'opérateur de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ défini par : $(b(u), v) \in A_b$ si, et seulement si, $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, $b(u) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $v \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ et u est solution entropique de (PS) avec $f = v + b(u)$.

THÉORÈME 5 (Propriétés de l'opérateur A_b). –
(1) A_b *est T-accrétif dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$;
(2) *le domaine de* A_b, $\mathcal{D}(A_b)$ *est dense dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$;
(3) $\forall\lambda > 0$, *l'image de* $I + \lambda A_b$, $R(I + \lambda A_b)$ *est dense dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Le point (1) se déduit directement du lemme 3. Pour les points (2) et (3), grâce aux résultats de Bénilan et Touré [3], on approche les fonctions b et f par des fonctions régulières appropriées.

3. Le problème d'évolution

Introduisons maintenant la notion de « bonne solution » de (PE). On appelle « bonne solution » toute fonction $u : Q \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $v = b(u)$ soit solution au sens de la théorie des semi-groupes du problème :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + A_b v \ni f, \quad v(0) = v_0.$$

Compte tenu des résultats développés dans la section 2, il existe une « bonne solution » de (PE) qui est caractérisée par les inégalités intégrales du théorème 1. Il en résulte

THÉORÈME 6. – *Pour tous* $f, \hat{f} \in \mathrm{L}^1(Q)$, $v_0, \hat{v}_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \big(b(u) - b\big(\hat{u}\big)\big)^+(t) \leqslant \int_{\mathbb{R}} \big(b(u) - b\big(\hat{u}\big)\big)^+(s) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \big(f - \hat{f}\,\big)^+ \,\mathrm{d}\tau$$

pour tous $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *où* u *et* $\hat{u}$ *sont les « bonnes solutions » de* $\mathrm{PE}(f, v_0)$ *respectivement* $\mathrm{PE}(\hat{f}, \hat{v}_0)$.

Suivant la théorie générale des semi-groupes non linéaire dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, ce résultat est la conséquence directe du théorème 4, il implique l'unicité de $b(u)$ et le principe de comparaison.

Faisons maintenant le lien avec les solutions « faibles ». Introduisons pour cela l'hypothèse de structure de type Alt et Luckhauss [1].

Il existe $\tilde{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$a(k, \xi) = \tilde{a}\big(b(k), \xi\big), \quad \forall k, \xi \in \mathbb{R}. \tag{H2}$$

On fait l'hypothèse complémentaire, il existe des fonctions continues, $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ et $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\big(a(k, \xi) - a(k, 0)\big) \cdot \xi \geqslant \lambda\big(b(k)\big)|\xi|^2 \tag{H3}$$

pour tous $k, \xi \in \mathbb{R}$; $|\xi| \geqslant R(b(k))$.

DÉFINITION 7. – Soient $f \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ et $v_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle *solution faible* de (PE) toute fonction u mesurable telle que $b(u) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(Q)$, $\varphi(u) \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ vérifient :
(i) $b(u)_t \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$, $h = a(u, \varphi(u)_x) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(Q)$;
(ii) $b(u)_t - h_x = f$ dans $\mathcal{D}'(Q)$ et $b(u(0)) = v_0$.

La dernière condition doit être comprise au sens précis suivant :

$$\int_0^T \langle b(u)_t, \xi \rangle \,\mathrm{d}t = -\int_Q b(u)\xi_t \,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} v_0 \xi(0)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $\xi \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{D}(\mathbb{R})) \cap \mathrm{W}^{1,1}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}))$, tel que $\xi(T)=0$, où $\langle , \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\mathrm{H}^{-1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.

On note $B(r)=\int_0^r \varphi(s)\,\mathrm{d}b(s)$ et on fait l'hypothèse complémentaire suivante :

$$\begin{cases} f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(Q), \quad \text{p.p. } t \in]0,T[, \quad f(t) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}), \\ v_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_0^T \|f(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}t < +\infty. \end{cases} \tag{H4}$$

PROPOSITION 8. – *Soient f, v_0 vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H4), *si* $B(v_0) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, *la bonne solution u de* (PE) *est solution faible.*

Ce résultat est obtenu en suivant la démarche de Carrillo, cf. [5]. La condition sur $B(v_0)$ est utilisée pour montrer que les « bonnes solutions » sont dans ce cas d'énergie finie ce qui permet d'en déduire qu'elles sont solutions faibles, voir également [4].

Références bibliographiques

[1] Alt H.W., Luckhauss S., Quasi-linear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 183 (1983) 311–341.

[2] Bénilan Ph., Touré H., Sur l'équation générale $u_t = a(\cdot, u, \varphi(\cdot, u)_x)_x$, dans L^1, I. Étude du problème stationnaire, in : Evolution Equation, Proceedings Conference L.S.U., Janvier 1993, Lectures Notes, Vol. 168, 1994, pp. 35–62.

[3] Bénilan Ph., Touré H., Sur l'équation générale $u_t = a(\cdot, u, \varphi(\cdot, u)_x)_x$, dans L^1, II. Le problème d'évolution, Ann. Inst. Henri Poincaré 12 (6) (1995) 727–761.

[4] Bénilan Ph., Wittbold P., On mild and weak solution of elliptic-parabolic problems, Adv. in Differential Equations 1 (6) (1996) 1053–1072.

[5] Carrillo J., Entropy solutions for nonlinear degenerate problems, Arch. Rational Mech. Anal. 147 (1999) 269–361.