C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 23–26

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

Petits espaces de Lebesgue et quelques applications

Alberto Fiorenza [a,1], Jean-Michel Rakotoson [b]

[a] **Dipartimento di Costruzioni e Metodi Matematici in Architettura, Universitá di Napoli “Federico II”, via Monteoliveto, 3, I-80134 Napoli, Italy**

[b] **Laboratoire d’applications des mathématiques, Téléport 2 Département de mathématiques, Université de Poitiers, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France**

Reçu le 11 juillet 2001 ; accepté après révision le 5 novembre 2001

Note présentée par Pierre-Louis Lions.

Résumé On se propose d’établir quelques propriétés des petits espaces de Lebesgue introduits par Fiorenza [7], notamment la convergence monotone de Lévi et des propriétés d’équivalence de normes. En combinant ces propriétés avec les inégalités de Poincaré–Sobolev pour le réarrangement relatif [11], nous donnons quelques estimations précises concernant les espaces de Sobolev associés à ces espaces et les régularités des solutions d’équations quasilinéaires lorsque les données sont dans ces espaces. Pour citer cet article : A. Fiorenza, J.-M. Rakotoson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 23–26. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On small Lebesgue spaces and their applications

Abstract We prove some new properties of the small Lebesgue spaces introduced by Fiorenza [7]. Combining these properties with the Poincaré–Sobolev inequalities for the relative rearrangement (see [11]), we derive some new and precises estimates either for small Lebesgue–Sobolev spaces or for quasilinear equations with data in the small Lebesgue spaces. To cite this article: A. Fiorenza, J.-M. Rakotoson, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 23–26. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In this Note, we are interested in giving few properties and applications of the so called small Lebesgue spaces whose definition is recalled below (*see* Theorem 1).

These spaces have some common properties with the usual Lebesgue spaces as the monotone Levi properties. Nevertheless, there are properties that are true for the usual Lebesgue spaces and not satisfied by those spaces (*see* the definition of V_p and Theorem 4). As for the application of the monotone Levi property, and the pointwise Poincaré–Sobolev inequality, we give an explicit estimate of the oscillation of a function u being in the Grand Sobolev space $\mathrm{W}^{1(N}(\Omega)$ (*see* Theorem 3). The last Theorem 5 shows that

Adresses e-mail : fiorenza@unina.it (A. Fiorenza); rako@mathlabo.univ-poitiers.fr (J.-M. Rakotoson).

S1631-073X(02)02199-4/FLA

the small Lebesgue spaces are limit spaces as the Lorentz spaces for having the L^∞-regularity but with a different aspect since the parameter p plays a crucial role.

1. Introduction

Les petits espaces de Lebesgue ont été introduits très récemment par Fiorenza [7] dans le cadre de l'étude des espaces duaux des Grands espaces de Lebesgue de Iwaniec–Sbordone [9]. Ces derniers espaces se sont avérés utiles pour l'étude de problèmes à données mesures. Il en est de même pour les petits espaces de Lebesgue qui sont les prémices de la recherche sur les espaces duaux des Grands espaces de Sobolev, utiles pour obtenir des théorèmes de régularité des problèmes d'évolution à données mesures (*voir* [8]). Dans cette Note, on va s'intéresser aux applications liées à des équations elliptiques.

Il est maintenant bien connu que si $Au = -\operatorname{div}(\widehat{a}(x,u,\nabla u))$ est un opérateur vérifiant, les conditions classiques de Leray–Lions sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ici, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < N$) et f une fonction de $L^r(\Omega)$, $r > N/p$, alors les solutions de $Au = f$ sont bornées. On sait que le résultat n'est pas vrai si $r = N/p$. Depuis l'introduction des petits espaces de Lebesgue, notés ici $L^{(q}(\Omega)$, vérifiant les inégalités, $\forall \varepsilon > 0$ $L^{q+\varepsilon}(\Omega) \subsetneq L^{(q}(\Omega) \subsetneq L^q(\Omega)$, on est amené à se poser la question : l'espace $L^{(N/p}(\Omega)$ est-il pas un espace limite pour obtenir une telle régularité L^∞. C'est l'objet du théorème 4 ci-dessous. On y montre des résultats nouveaux et optimaux pour $p > 2$ dans le cadre des petits espaces de Lebesgue. On y prouve des estimations nouvelles et précises donnant entre autre une estimation de la norme de l'opérateur $(-\Delta)^{-1} : L^{(N/2}(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$. De même, pour les inclusions de Sobolev, on considère ici un espace limite $W^{1(N}(\Omega)$ pour l'injection dans $L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$ en donnant une estimation précise de la décroissance de l'oscillation autour d'une boule $B(x,t)$ lorsque $t \to 0$ pour une fonction $u \in W^{1(N}(\Omega)$.

Les résultats précédents sont aussi connus dans le cadre des espaces de Lorentz. Par exemple, on sait que si $f \in L^{N/p,1/(p-1)}(\Omega)$, les solutions de $Au = f$ sont bornées (*voir* [1,5]) mais, dans le cas où $p > 2$, $L^{N/p,1/(p-1)}(\Omega)$ et $L^{(N/p}(\Omega)$ ne sont pas comparables. Pour $p \leqslant 2$, on a l'inclusion stricte $L^{(N/p}(\Omega) \subsetneq L^{N/p,1/(p-1)}(\Omega)$. Dans le cadre des espaces de Sobolev, l'espace limite $W^{1(N}(\Omega)$ considéré est contenu dans l'espace de Lorentz–Sobolev suivant $\{v \in W^{1,1}(\Omega) : |\nabla v| \in L^{N,1}(\Omega)\}$. Ce dernier espace est contenu dans $C(\Omega)$ (*voir* [14,4,2]). Néanmoins, le résultat que nous apportons sur l'oscillation $\operatorname{Osc}_{B(x,t)} v$ est nouveau pour $v \in W^{1(N}(\Omega)$.

Nous commençons par donner de nouvelles propriétés des petits espaces de Lebesgue. Nous prouvons le théorème de Levi dans le cadre de ces espaces. Cela nous permet de préciser le comportement de la norme du gradient d'une fonction v sur une boule $B(x,t)$ lorsque $t \to 0$. Ensuite, nous terminons par deux applications de ces résultats.

2. Rappel de quelques définitions et résultats

Dans tout ce qui suit, Ω est un ensemble borné mesurable au sens de Lebesgue.

Soit $1 < p < +\infty$. Pour $g \geqslant 0$ mesurable sur Ω, on peut associer une quantité introduite dans [7] :

$$|g|_{p'} = \operatorname*{Inf}_{\substack{g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k \\ g_k \geqslant 0}} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\fint_\Omega g_k^{(p-\varepsilon)'} \,\mathrm{d}x \right)^{1/(p-\varepsilon)'} \right\},$$

avec $p' = \frac{p}{p-1}$, et $\fint_\Omega$ la moyenne sur Ω.

THÉORÈME 1. – *L'espace défini par* $L^{(p'}(\Omega) = \{g$ *mesurable* $: \|g\|_{p'} < +\infty\}$ *est un espace de Banach avec la norme donnée par* : $g \in L^{(p'}(\Omega) \mapsto \|g\|_{p'}$. *Cet espace est appelé petit espace de Lebesgue. De plus,* $\forall \varepsilon > 0 : L^{p'+\varepsilon}(\Omega) \subsetneq L^{(p'}(\Omega) \subsetneq L^{p'}(\Omega)$.

On notera dans la suite $|g|_{(p'} = \|g\|_{p'}$.

2.1. Définition du réarrangement monotone et relatif

DÉFINITION 1 (du réarrangement monotone). – Soit $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurable. On définit sur $\overline{\Omega}_*=[0,|\Omega|]$ la fonction $u_*: u_*(s)=\mathrm{Inf}\{t\in\mathbb{R},\ |u>t|\leqslant s\},\ s\in\Omega_*$ et $u_*(0)=\operatorname{ess\,sup}_\Omega u,\ u_*(|\Omega|)=\operatorname{ess\,inf}_\Omega u$. Ici, $|u>t|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{x\in\Omega: u(x)>t\}$. La fonction u_* est appelée le réarrangement décroissant de u.

Dans la suite, on associera à une fonction $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurable et à une fonction v intégrable la fonction $w:\Omega_*=\,]0,|\Omega|[\,\to\mathbb{R}$ définie par

$$w(s)=\int_{u>u_*(s)} v\,\mathrm{d}x+\int_0^{s-|u>u_*(s)|}\bigl(v|_{\{u=u_*(s)\}}\bigr)_*(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Ici, $v|_E$ désigne la restriction à un sous ensemble $E\subset\Omega$.

Pour la propriété qui suit, on peut consulter [10,3,13].

PROPRIÉTÉ 1. – *Soit Ω un sous-espace mesurable borné de $\mathbb{R}^N$. Alors $((u+\lambda v)_*-u_*)/\lambda \underset{\lambda\to 0}{\rightharpoonup} \mathrm{d}w/\mathrm{d}s$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega_*)$-faible si $1\leqslant p<+\infty$ et dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega_*)$-faible-étoile si $p=+\infty$. Dans tous les cas, $|\mathrm{d}w/\mathrm{d}s|_{\mathrm{L}^p(\Omega_*)}\leqslant|v|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$.*

DÉFINITION 2 (du réarrangement relatif). – La fonction $\mathrm{d}w/\mathrm{d}s$ est appelée le réarrangement relatif de v relativement à u et est notée $v_{*u}=\mathrm{d}w/\mathrm{d}s$.

Pour une notion similaire au réarrangement relatif, on peut consulter [1,6].

Une propriété utile sera la suivante (*voir* [12]).

PROPRIÉTÉ 2. – $|v_{*u}|_{\mathrm{L}^{(p}(\Omega)}\leqslant|v|_{\mathrm{L}^{(p}(\Omega)}$ *si* $v\in\mathrm{L}^{(p}(\Omega)$.

Les résultats suivants sont introduits dans [11].

DÉFINITION 3. – Un sous-ensemble V de $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$ satisfait l'inégalité de Poincaré–Sobolev pour un réarrangement relatif (appelé PSR) s'il existe une fonction $K(\cdot,\Omega,V)$ de Ω_* dans $\mathbb{R}_+$, tel que pour tout $u\in V$:

(a) $u_*\in\mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_*)$;

(b) $-u_*'(s)\leqslant K(s,\Omega,V)|\nabla u|_{*u}(s)$ pour presque tout $s\in\Omega_*$.

Dans la suite, on utilisera le résultat suivant :

LEMME 1. – *Soit Ω une boule de rayon $R>0$. Alors $V=\mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$ vérifie la propriété PSR. De plus, $K(s,\Omega,V)=\frac{1}{\omega_{N-1}}\bigl(\frac{\omega_N}{2}\bigr)^{1-1/N}\mathrm{Max}(s^{1/N-1},(\omega_N R^N-s)^{1/N-1})$. Ici, ω_m désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^m$.*

3. Résultats principaux

THÉORÈME 2 (Le théorème de convergence monotone de Levi pour les petits espaces de Lebesgue). – *Soit (f_m), une suite croissante t.q. $M=\sup_m\|f_m\|_{(p'}<+\infty$.*

Alors la fonction $f=\sup_m f_m$ est telle que

(1) $f\in\mathrm{L}^{(p'}$;

(2) $f_m\nearrow f$ *a.e.* ;

(3) $f_m\to f$ *dans* $\mathrm{L}^{(p'}$.

COROLLAIRE 1. – *Soit $f\in\mathrm{L}^{(p'}(\Omega)$ et soit (E_m) une suite de sous-espaces mesurables de Ω telle que*

(i) $\Omega\supseteq E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\cdots\supseteq E_m\supseteq\ldots$;

(ii) *mesure de* $E_m=|E_m|\to 0$.

Alors $\|f\chi_{E_m}\|_{\mathrm{L}^{(p'}(\Omega)}\to 0$.

PROPOSITION 1. – *Soit g dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Pour $\sigma\in\Omega_*$, on pose $g_{**}(\sigma)=\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma|g|_*(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, $|g|_{\mathrm{L}^{(p}(\Omega)}\leqslant|g_{**}|_{\mathrm{L}^{(p}(\Omega_*)}\leqslant p'|g|_{\mathrm{L}^{(p}(\Omega)}$.*

Des applications de ces résultats sont données par les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. – *On suppose que* Ω *est un ouvert borné lipchitzien. Soit* $\mathrm{W}^{1(N}(\Omega)=\{v\in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega): |\nabla v|\in \mathrm{L}^N(\Omega)\}$. *Alors,* $\mathrm{W}^{1(N}(\Omega)\subset \mathrm{L}^\infty(\Omega)\cap \mathrm{C}(\Omega)$. *De plus, nous avons le taux de convergence suivant* : $\operatorname{osc}_{B(x,t)} u \leqslant \frac{\omega_N^{1/N'}}{\omega_{N-1}}|\Omega|^{1/N}(N')^{1/N'}|\nabla u\chi_{B(x,t)}|_{\mathrm{L}^{(N}(\Omega)}$, *où* $B(x,t)\subset\Omega,\ t>0, u\in \mathrm{W}^{1(N}(\Omega),\ N'=\frac{N}{N-1}$.

Soit $u\in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ solution de $\mathcal{P}\ \int_\Omega \widehat{a}(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x,\ \forall\varphi\in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, où $\widehat{a}:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ vérifie la condition de coercivité suivante : pour presque tout x, $\forall(u,\xi)\ :\ \widehat{a}(x,u,\xi)\xi\geqslant\alpha|\xi|^p,\ \alpha>0$.

Pour $p>2$, on définit le sous espace vectoriel suivant : $V_p=\{g\in \mathrm{L}^{(N/p}(\Omega): g_{**}^{1/(p-1)}\in \mathrm{L}^{(N/p'}(\Omega_*)\}$.

THÉORÈME 4. – V_p *est différent de* $\mathrm{L}^{(N/p}(\Omega)$.

THÉORÈME 5. – *Si* $f\in \mathrm{L}^{(N/p}(\Omega),\ p\leqslant 2$, *alors* u *est bornée. Si, de plus,* $p<\frac{2N}{N+1}$ *alors on a l'estimation* : $|u|_\infty\leqslant c_{\alpha N}\left(\int_0^1 s^{-p'/N'}\varphi(s)^{1/(p-1)}\,\mathrm{d}s\right)|g_{*v}|^{1/(p-1)}_{\mathrm{L}^{(N/p}(\Omega_*)}<+\infty$.

Ici, $\varphi(s)=\sup_{0<\varepsilon<q-1}(\varepsilon s)^{1/(q-\varepsilon)}$, *avec* $q=\frac{N}{N-p},\ c_{\alpha N}=\frac{1}{\alpha^{p'/p}(N\omega_N^{1/N})^{p'}},\ g=|f|,\ v=|u|,\ |\Omega|=1$.

Si $p>2$ *et* $f\in V_p$ *alors* u *est bornée.*

Note. – Notons qu'avec la propriété 2 on a : $|g_{*v}|_{\mathrm{L}^{(N/p}(\Omega_*)}\leqslant|f|_{\mathrm{L}^{(N/p}(\Omega)}$.

Le résultat $p>2$ ci-dessus est optimal au sens qu'il existe des fonctions $f\notin V_p$, $f\in \mathrm{L}^{(N/p}(\Omega)\cap \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, telles que l'unique solution de l'équation $-\Delta_p u=f$ est non bornée. De ce fait, en raisonnant par l'absurde, on montre que $\mathrm{L}^{(N/p}$ n'est pas inclus dans l'espace $\mathrm{L}^{N/p,1/(p-1)}(\Omega)$.

---

[1] This work has been partially performed as a part of a National Research Project supported by M.U.R.S.T. and supported by the Programma di Scambi Internazionali per la Breve Mobilitai instituted by Universitai di Napoli "Federico II".

Références bibliographiques

[1] Alvino A., Trombetti G., Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellitiche degeneri, Ricerche Mat. 27 (1978) 413–428.
[2] Cianchi A., Pick L., Sobolev imbedding into BMO, VMO, L^∞, Ark. Mat. 36 (1998) 317–340.
[3] Diaz J.I., Nagai T., Rakotoson J.M., Symmetrization techniques on unbounded domains: Application to a chemotaxis system on $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations 145 (1) (1998) 156–183.
[4] Devore R.A., Sharpley R.C., On the differentiability of functions in $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. 91 (2) (1984) 326–328.
[5] Ferone V., Posteraro M.R., Rakotoson J.M., L^∞ estimates for nonlinear elliptic problems with p-growth in the gradient, J. Inequal. Appl. 3 (1999) 109–125.
[6] Ferone A., Volpicelli R., Some relations between pseudo-rearrangement and relative rearrangement, Nonlinear Anal. 41 (7–8) (2000) 855–869.
[7] Fiorenza A., Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces, Collect. Math. 51 (2) (2000) 131–148.
[8] Fiorenza A., Mercaldo A., Rakotoson J.M., Regularity and comparison results in Grand Sobolev spaces for parabolic equations with measure data, Appl. Math. Lett. 14 (2001) 979–981.
[9] Iwaniec T., Sbordone C., On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses, Arch. Rational Mech. Anal. 119 (1992) 129–143.
[10] Mossino J., Temam R., Directional derivate of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics, Duke Math. J. 48 (1981) 475–495.
[11] Rakotoson J.M., General pointwise relations for the relative rearrangement and applications (to appear).
[12] Rakotoson J.M., Some new applications of the pointwise relations for the relative rearrangement, Differential Integral Equations (to appear).
[13] Rakotoson J.M., Temam R., A co-area formula with applications to monotone rearrangement and to regularity, Arch. Rational Mech. Anal. 109 (3) (1990) 213–238.
[14] Stein E.M., Editor's note, On the differentiability of functions in $\mathbb{R}^N$, Ann. Math. 113 (2) (1981) 381–385.