

Estimateur a posteriori en norme L^∞ pour les équations elliptiques

Abdellatif Agouzal

UMR 5585-MAPLY, 43, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex 1, France

Reçu le 14 janvier 2001 ; accepté après révision le 5 novembre 2001

Note présentée par Olivier Pironneau.

Résumé

Dans cette Note, on montre qu'une version modifiée de l'estimateur de Bank–Weiser permet de définir un estimateur a posteriori en norme L^∞ pour les méthodes d'approximations conforme ou non conforme. On démontre, sans hypothèse de saturation ni comparaison avec des estimateurs résiduels, l'équivalence de l'estimateur avec la norme L^∞ de l'erreur. *Pour citer cet article : A. Agouzal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 411–415.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

L^∞ -a posteriori error estimator for elliptic equations

Abstract

In this Note, we show that modification of Bank–Wieser estimator introduce an L^∞ -a posteriori error estimator for conforming and nonconforming methods. We prove, without saturation assumption nor comparison with residual estimators, the equivalence with the L^∞ error. *To cite this article: A. Agouzal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 411–415.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

One of the most successful estimator was proposed by Bank and Weiser and extended by many authors [1]. It is based on the solution of local Neumann problems on elements, which seem to allow for cancellation and thus lead to better results than the residual estimators. The classical proof of equivalence with the energy error requires the *saturation assumption*: this says that the solution can be better approximated asymptotically with quadratic than with linear finite elements. The saturation assumption is shown to be superfluous by Nochetto in [3]. However, removing this assumption requires comparison with residual estimators and some technical hypothesis.

In this Note, we show that modification of Bank–Wieser estimator introduce an L^∞ -a posteriori error estimator for conforming and nonconforming methods. We prove the reliability and the efficiency of the estimator without saturation assumption nor comparison with residual estimator.

Adresse e-mail : agouzal@lan.univ-lyon1.fr (A. Agouzal).

1. Introduction

L'un des estimateurs d'erreur a posteriori le plus populaire est l'estimateur hiérarchique, introduit par Bank et Weiser [1] pour un problème elliptique symétrique et généralisé plus tard par divers auteurs pour une famille de problèmes elliptiques, non symétriques, non définis positifs et non linéaires. Dans cette Note, nous allons montrer qu'une version modifiée de cet estimateur permet de définir un estimateur a posteriori en norme L^∞ pour une approximation conforme ou nonconforme. Contrairement à Nochetto [3], notre démonstration n'utilise pas de comparaison avec un estimateur résiduel, ni d'hypothèse de non dégénérescence ou de saturation [1]. La démonstration repose sur les résultats récents de Dari et al. [2] concernant des estimations, plus fines que celles obtenues dans [1], en norme $W^{2,1}$ de la fonction de Green régularisée.

2. Estimateur a posteriori en norme L^∞

Soit Ω un ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). Soit u la solution faible du problème modèle

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^\infty(\Omega)$; on rappelle que $u \in C^{0,\gamma} \cap H_0^1(\Omega)$ avec $\gamma > 0$ [3]. On considère une triangulation \mathcal{T}_h régulière, en triangles ou tétraèdres de Ω . On notera par E l'ensemble des arêtes (faces) de \mathcal{T}_h , pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ par E_T les arêtes (faces) de T , par n_T la normale unitaire extérieure à ∂T et par $\Delta(T)$ l'ensemble des éléments de \mathcal{T}_h ayant une arête (face) commune avec T . Comme il est d'usage on notera par $[\cdot]_F$ le saut d'une fonction à travers l'arête (face) F et on pose $[\partial u_h / \partial n_T]_F = 0$ si F est une arête (face) frontalière. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on note par $P_k(T)$ l'espace des polynômes de degré k et on considère l'espace $P_0^d(T)$ des polynômes $P_d(T)$ s'annulant aux sommets pour $d = 2$ (arêtes pour $d = 3$) de T . Enfin, on pose $U(T) = P_0^d(T) + \text{vect}(b_T)$ où $b_T \in P_{d+1}(T) \cap H_0^1(T)$ est la fonction bulle standard.

Dans toute la suite de cette Note, les lettres C, C_0, C_1, \dots désignent des constantes qui peuvent changer d'une inégalité à la suivante et qui ne dépendent que de l'angle minimal de \mathcal{T}_h .

Soit $u_h \in V_h = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P_1(T), \forall e \in E, \int_e [v_h] d\sigma = 0\}$, on suppose que

$$\forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega); \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx.$$

On considère le problème local, posé sur $T \in \mathcal{T}_h$, suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_T \in U(T) \text{ tel que :} \\ \forall v_T \in U(T); \quad \int_T \nabla w_T \cdot \nabla v_T \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_T} \right] v_T \, d\sigma - \int_T f v_T \, dx, \end{cases}$$

et on pose :

$$\forall \omega \subset \Omega; \quad \text{osc}_\infty(f, \omega) := \sup_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset \omega} \left(h_T^2 \inf_{f_h \in P_0(T)} \|f - f_h\|_{L^\infty(T)} \right),$$

$$\eta_T^\infty(u_h) = \|w_T\|_{L^\infty(T)} + \|[u_h]\|_{L^\infty(\partial T)} \quad \text{et} \quad \eta^\infty = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^\infty(u_h).$$

Tout d'abord nous avons le

LEMME 2.1. – Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$h_T^2 \|f\|_{L^\infty(T)} \leq C_1 \|u - u_h\|_{L^\infty(T)} + C_2 \text{osc}_\infty(f, T).$$

Démonstration. – Soit $f_h \in P_0(T)$ et $b_T \in P_{d+1}(T) \cap H_0^1(T)$ la fonction bulle standard vérifiant $0 \leq b_T \leq 1$ et $\|b_T\|_{L^\infty(T)} = 1$. D’une part, en utilisant la formule de Green, on a

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 |f_h| h_T^d &\leq \left| \int_T f_h b_T \, dx \right| \leq \int_T |f - f_h| b_T \, dx + \left| \int_T (f + \Delta u_h) b_T \, dx \right| \\ &\leq \|f - f_h\|_{L^\infty(T)} \int_T b_T \, dx + \left| \int_T (u - u_h) \Delta b_T \, dx - \int_{\partial T} \frac{\partial b_T}{\partial n_T} (u - u_h) \, d\sigma \right| \\ &\leq \|f - f_h\|_{L^\infty(T)} \int_T b_T \, dx + \|u - u_h\|_{L^\infty(T)} \left(\|\Delta b_T\|_{L^1(T)} + \left\| \frac{\partial b_T}{\partial n_T} \right\|_{L^1(\partial T)} \right). \end{aligned} \right.$$

D’autre part, étant donné que $b_T \in P_{d+1}(T) \cap H_0^1(T)$ et $\|b_T\|_{L^\infty(T)} = 1$, il est facile de vérifier que

$$\|\Delta b_T\|_{L^1(T)} + \left\| \frac{\partial b_T}{\partial n_T} \right\|_{L^1(\partial T)} \leq C_2 h_T^{d-2}.$$

En utilisant l’inégalité triangulaire, on obtient alors

$$h_T^2 \|f\|_{L^\infty(T)} \leq C_1 \|u - u_h\|_{L^\infty(T)} + C_2 \text{osc}_\infty(f, T).$$

THÉORÈME 2.1. – Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$\begin{aligned} \max_{S \in E_T} \|[u_h]\|_{L^\infty(S)} &\leq \|u - u_h\|_{L^\infty(\Delta(T))}, \\ \|w_T\|_{L^\infty(T)} &\leq C_1 \|u - u_h\|_{L^\infty(\Delta(T))} + C_2 \text{osc}_\infty(f, \Delta(T)). \end{aligned}$$

Démonstration. – La première inégalité est évidente, démontrons la deuxième. Soit $\hat{w}_T \in H_0^1(\Delta(T))$ l’unique fonction définie par :

$$\forall T' \subset \Delta(T), \quad \hat{w}_T \in P_0^d(T') \quad \text{et} \quad \hat{w}_T = w_T \quad \text{sur} \quad T.$$

Tout d’abord, remarquons que

$$\left\{ \begin{aligned} C_0 h_T^{d-2} \|w_T\|_{L^\infty(T)}^2 &\leq \|\nabla w_T\|_{0,T}^2 = \frac{1}{2} \sum_{T' \subset \Delta(T)} \int_{T'} \nabla u_h \cdot \nabla \hat{w}_T \, dx - \int_T f \hat{w}_T \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T' \subset \Delta(T)} \int_{T'} \nabla(u_h - u) \cdot \nabla \hat{w}_T \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Delta(T)} f \hat{w}_T \, dx + \int_T f \hat{w}_T \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T' \subset \Delta(T)} \left\{ - \int_{T'} (u_h - u) \Delta \hat{w}_T \, dx + \int_{\partial T'} (u_h - u) \frac{\partial \hat{w}_T}{\partial n_{|T'}} \, d\sigma \right\} - \frac{1}{2} \int_{\Delta(T)} f \hat{w}_T \, dx - \int_T f \hat{w}_T \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - u_h\|_{L^\infty(\Delta(T))} \left(\|\Delta \hat{w}_T\|_{L^1(\Delta(T))} + \sum_{T' \subset \Delta(T)} \left\| \frac{\partial \hat{w}_T}{\partial n_{T'}} \right\|_{L^1(\partial T')} \right) \\ &\quad + \frac{3}{2} \|f\|_{L^\infty(\Delta(T))} \|\hat{w}_T\|_{L^1(\Delta(T))}. \end{aligned} \right.$$

En utilisant l’inégalité suivante :

$$h_T^{-2} \|\hat{w}_T\|_{L^1(\Delta(T))} + \|\Delta \hat{w}_T\|_{L^1(\Delta(T))} + \sum_{T' \subset \Delta(T)} \left\| \frac{\partial \hat{w}_T}{\partial n_{T'}} \right\|_{L^1(\partial T')} \leq C_1 h_T^{d-2} \|w_T\|_{L^\infty(T)},$$

on déduit que :

$$\|w_T\|_{L^\infty(T)} \leq C_1 \|u - u_h\|_{L^\infty(\Delta(T))} + C_2 \sum_{T' \subset \Delta(T)} h_T^2 \|f\|_{L^\infty(T')}.$$

Enfin, en utilisant le lemme 2.1 et l’inégalité précédente on obtient le résultat.

Pour pouvoir démontrer l'estimation directe nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses et rappeler quelques résultats techniques (voir aussi [2,4]). Tout d'abord on suppose que

$$\text{il existe une constante } \gamma > 1, \text{ telle que } \min_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \geq C \left(\max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \right)^\gamma$$

et que si T_1 et T_2 ont un sommet commun \mathcal{A} , alors il existe une suite $T_1 = \widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_k = T_2$ de tétraèdres (ou triangles) ayant chacun \mathcal{A} comme sommet et tels que \widehat{T}_j et \widehat{T}_{j+1} ont une face (arête) commune.

Soient $x \in \Omega$ et $\rho > 0$, on considère la fonction régularisée de Green δ [2,4] vérifiant

$$\int_{\Omega} \delta \, dx = 1, \quad \text{supp } \delta \subset B(x, \rho) \quad \text{et} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{C}{\rho^d}.$$

Soit $G \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible de $-\Delta G = \delta$. On rappelle [4] qu'il existe $p_0 > 1$ tel que pour tout $p \in]1, p_0[$, $|G|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \rho^{-2d(p-1)/(p-1)^{4/3}}$. En particulier, pour h assez petit, $p - 1 = |\ln \rho|^{-1}$ et $\rho = h^\beta$ avec $\beta > 1$ et via le théorème de la convergence dominée on a : $|G|_{W^{2,1}(\Omega)} \leq C |\ln h|^{4/3}$. De plus, avec ce choix de ρ , il existe $x \in \Omega$ tel que pour h assez petit [2,4] on a

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \left| \int_{\Omega} (u - u_h) \delta \, dx \right| + C_2 \max_{T \in \mathcal{T}_h} \|[u_h]\|_{L^\infty(\partial T)}.$$

Tout d'abord nous avons le lemme suivant dont la démonstration est facile.

LEMME 2.2. – Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $v \in H^1(T)$, il existe un unique polynôme $\Pi v \in U(T)$ vérifiant

$$\forall S \in E_T, \quad \int_S (v - \Pi v) \, d\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \int_T (v - \Pi v) \, dx = 0.$$

De plus, on a

$$\|\Pi v\|_{L^1(T)} \leq C \left(\|v\|_{L^1(T)} + \sum_{S \in E_T} h_S \|v\|_{L^1(S)} \right).$$

Enfin, on a le

THÉORÈME 2.2. – Il existe h^* tel que pour tout $h \leq h^*$, on a l'estimation a posteriori suivante :

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C |\ln h|^{4/3} (\eta^\infty(u_h) + \text{osc}_\infty(f, \Omega)).$$

Démonstration. – Soit $G_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$ [4], tel que

$$\begin{cases} \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall S \in E_T, \\ \|G - G_h\|_{L^1(S)} \leq Ch_S |G|_{W^{2,1}(\omega(T))}, \quad \|G - G_h\|_{L^1(T)} \leq Ch_T^2 |G|_{W^{2,1}(\omega(T))}, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial n_T} (G|_T - G_h|_T) \right\|_{L^1(S)} \leq C |G|_{W^{2,1}(\omega(T))}, \end{cases}$$

où $\omega(T)$ est l'ensemble des éléments de \mathcal{T}_h ayant un sommet commun avec T . D'une part, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_h) \delta \, dx &= - \int_{\Omega} (u - u_h) \Delta G \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla(u - u_h) \nabla G \, dx - \int_{\partial T} u_h \frac{\partial G}{\partial n_T} \, d\sigma \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla(u - u_h) \nabla(G - G_h) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial T} [u_h] \frac{\partial(G - G_h)}{\partial n_T} \, d\sigma \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T f(G - G_h) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_T} \right] (G - G_h) \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial T} [u_h] \frac{\partial(G - G_h)}{\partial n_T} \, d\sigma \right). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, pour tout $f_h \in P_0(T)$, en utilisant le formule de Green. On a

$$\left\{ \begin{aligned} A_T &= - \int_T f(G - G_h) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_T} \right] (G - G_h) \, d\sigma \\ &= - \int_T f(G - G_h) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_T} \right] \Pi(G - G_h) \, d\sigma \\ &= - \int_T (f - f_h)(G - G_h - \Pi(G - G_h)) \, dx + \int_T \nabla w_T \cdot \nabla \Pi(G - G_h) \, dx \\ &= \int_T (f - f_h)(G - G_h - \Pi(G - G_h)) \, dx - \int_T w_T \Delta(\Pi(G - G_h)) \, dx + \int_{\partial T} \frac{\partial \Pi(G - G_h)}{\partial n_T} w_T \, d\sigma \\ &\leq \|f - f_h\|_{L^\infty(T)} \|G - G_h - \Pi_h(G - G_h)\|_{L^1(T)} \\ &\quad + \|w_T\|_{L^\infty(T)} \left(\|\Delta \Pi(G - G_h)\|_{L^1(T)} + \left\| \frac{\partial \Pi(G - G_h)}{\partial n_T} \right\|_{L^1(\partial T)} \right). \end{aligned} \right.$$

Or

$$\|\Delta \Pi(G - G_h)\|_{L^1(T)} + \left\| \frac{\partial \Pi(G - G_h)}{\partial n_T} \right\|_{L^1(\partial T)} \leq Ch_T^{-2} \|\Pi(G - G_h)\|_{L^1(T)}$$

et

$$\|\Pi(G - G_h)\|_{L^1(T)} \leq Ch_T^2 |G|_{W^{2,1}(\omega(T))} \quad \text{et} \quad |G|_{W^{2,1}(\omega(T))} \leq C |\ln h|^{4/3},$$

on en déduit que

$$A_T \leq C |\ln h|^{4/3} (\|w_T\|_{L^\infty(T)} + \text{osc}_\infty(f, T)).$$

En utilisant les mêmes estimations et le lemme 2.2, on a aussi :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_T (f - f_h)(G - G_h - \Pi(G - G_h)) \, dx &\leq \|f - f_h\|_{L^\infty(T)} (\|G - G_h\|_{L^1(T)} + \|\Pi(G - G_h)\|_{L^1(T)}) \\ &\leq Ch_T^2 |\ln h|^{4/3} \|f - f_h\|_{L^\infty(T)}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en regroupant ces résultats, on obtient finalement

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C |\ln h|^{4/3} (\eta^\infty(u_h) + \text{osc}_\infty(f, \Omega)).$$

Références bibliographiques

- [1] Bank R.E., Weiser A., Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations, *Math. Comp.* 44 (1985) 285–301.
- [2] Dari E., Durán R.G., Padra C., Maximum norm error estimators for three-dimensional elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2) (2000) 683–700.
- [3] Grisvard P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs Stud. Math., Vol. 24, Pitman, 1985.
- [4] Nochetto R.H., Pointwise a posteriori error estimates for elliptic problems on highly graded meshes, *Math. Comp.* 64 (209) (1995) 1–22.