

# Sur quelques limites de la physique des particules chargées vers la (magnéto)hydrodynamique

Yann Brenier<sup>a</sup>, Norbert J. Mauser<sup>b</sup>, Marjolaine Puel<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire J.A. Dieudonné, Parc Valrose, 06100 Nice, France

<sup>b</sup> Wolfgang Pauli Institute, c/o Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria

<sup>c</sup> Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, BC 187, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu et accepté le 6 novembre 2001

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

## Résumé

Nous discutons les connexions entre les modèles obtenus par différents « scalings » à partir du système de Dirac–Maxwell quantique-relativiste. En particulier, nous examinons des limites quasi-neutres/non-relativistes du système de Vlasov–Maxwell. Dans le cas d'un scaling où les effets relativistes sont partiellement conservés, on obtient un modèle du type magnéto-hydrodynamique (MHD), sinon on obtient les équations d'Euler des fluides incompressibles. Un point clef de notre analyse asymptotique rigoureuse est la méthode d'énergie modulée. *Pour citer cet article : Y. Brenier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 239–244.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## On some limits in charged particle physics towards (magneto)hydrodynamic equations

## Abstract

We discuss the connection between different scalings limits of the quantum-relativistic Dirac–Maxwell system. In particular we give rigorous results for the quasi-neutral/non-relativistic limit of the Vlasov–Maxwell system: we obtain a magneto-hydro-dynamic system when we consider the magnetic field as a non-relativistic effect and we obtain the Euler equation when we see it as a relativistic effect. A mathematical key is the modulated energy method. *To cite this article: Y. Brenier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 239–244.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Abridged English version

In this work we state some results on *quasi-neutral/non-relativistic limits* of the system obtained by coupling the nonrelativistic Vlasov equation to the Maxwell equations

$$\begin{aligned} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla f^\varepsilon - (E^\varepsilon - \alpha(\xi \wedge B^\varepsilon)) \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon &= 0, \\ -\alpha \partial_t B^\varepsilon + \operatorname{curl} E^\varepsilon &= 0, \quad \varepsilon \nabla \cdot E^\varepsilon = 1 - \rho^\varepsilon, \\ \varepsilon \alpha \partial_t E^\varepsilon + \operatorname{curl} B^\varepsilon &= \alpha j^\varepsilon, \quad \nabla \cdot B^\varepsilon = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Adresse e-mail : mpuel@ann.jussieu.fr (M. Puel).

where the parameter  $\alpha$  is chosen according to the scaling and the density  $\rho^\varepsilon$  and the current  $j^\varepsilon$  are given by

$$\rho^\varepsilon = \int f^\varepsilon(t, x, \xi) d\xi, \quad j^\varepsilon = \int \xi f^\varepsilon(t, x, \xi) d\xi. \quad (2)$$

For a particular scaling ( $\alpha = \varepsilon$ ), we can show that the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (1) gives the incompressible Euler equations

$$\partial_t j + \nabla : (j \otimes j) - E = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad \rho = 1, \quad (4)$$

$$\text{curl } E = 0, \quad B = 0, \quad (5)$$

with dissipative solutions in the sense of P.-L. Lions [9]. The notation  $a : (b \otimes c)$  for three vectors means  $\sum_{j=1}^d a_j b_j c_j$ . For a different scaling ( $\alpha = 1$ ), the magnetic field also occurs in the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (1), that we name “e-MHD” following D.D. Holm [8]:

$$\partial_t j + \nabla : (j \otimes j) - E + j \wedge B = 0, \quad (6)$$

$$j = \text{curl } B, \quad \rho = 1, \quad (7)$$

$$-\partial_t B + \text{curl } E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0. \quad (8)$$

We refer to [4] for details and proofs, which use the method of “modulated energies”. Further we imbed these results in a more general framework of scaling limits starting from the Dirac–Maxwell system which involves also the *classical limit* of vanishing Planck constant.

## 1. Introduction

Nous établissons quelques liens entre différents modèles de la physique des particules chargées. Le modèle de base des équations à une particule est le système de Dirac–Maxwell, qui appartient à la mécanique quantique relativiste. L'équation de Dirac donne l'évolution en temps du « spineur » à quatre composantes : deux pour la partie électron et deux pour la partie positron en distinguant les états selon les deux valeurs possibles du spin des fermions. Ce modèle est caractérisé par la constante de Planck  $\hbar$  et la vitesse de la lumière  $c$ .

Dans la *limite classique*  $\hbar \rightarrow 0$ , on recupère la mécanique classique, où l'équation de Dirac est remplacée par l'équation de Vlasov relativiste avec la force de Lorentz.

La *limite non relativiste*  $c \rightarrow \infty$  du système Dirac–Maxwell amène au système de Schrödinger–Poisson qui appartient à la mécanique quantique non relativiste. L'équation de Schrödinger est une équation à une composante qui modélise le mouvement des électrons sans distinguer les états du spin.

Ce système tend vers le système de Vlasov–Poisson dans la limite classique.

Une autre limite qui peut être considérée est la *limite quasi-neutre* qui va être expliquée dans la suite. Il s'agit d'une limite qui force la densité du système à compenser instantanément le « fond neutralisant » (« profil de dopage » dans les semiconducteurs). Cette limite permet le passage de Vlasov–Poisson vers les équations d'Euler des fluides incompressibles.

Il est aussi possible de considérer un système intermédiaire entre le système de « Vlasov relativiste »–Maxwell et le système de Vlasov–Poisson, c'est le système de « Vlasov non relativiste »–Maxwell. Ce modèle correspond aux cas où la vitesse des électrons est négligeable devant la vitesse de la lumière, mais le champ électromagnétique est considéré relativiste à tout ordre. On peut aussi écrire l'équivalent du système de « Vlasov non relativiste »–Maxwell en mécanique quantique, le système de Schrödinger–Maxwell [7]. Du point de vue physique, ce système est hybride car l'équation de Schrödinger (invariance de Galilée) correspond alors à une limite non relativiste de l'équation de Dirac et elle est couplée avec les équations de

Maxwell (invariance de Lorentz) qui sont entièrement relativistes. Pour des modèles « semi-nonrelativistes » à partir de l'équation de Pauli voir [12].

Résumons par un diagramme (figure 1) les liens formels entre ces différents systèmes.

Certaines de ces limites ont été rigoureusement démontrées. Tout d'abord, la limite semi-classique du système de Schrödinger–Poisson vers le système de Vlasov–Poisson a été établie dans [10,11] et [16]. D'autre part, les limites des systèmes de Vlasov–Maxwell ont été étudiées dans [1,5] (cas Vlasov non relativiste) et [15] (cas Vlasov relativiste). Enfin dans le cas linéaire où le champ électromagnétique est donné, la limite de l'équation de Dirac vers l'équation de Vlasov relativiste a été établie dans [6] et la limite de l'équation de Dirac vers l'équation de Schrödinger a été établie dans [2].

Suivant l'idée de Y.B. dans [3], nous introduisons un autre petit paramètre, la permittivité du système qui intervient dans les équations de Maxwell ou dans l'équation de Poisson. Dans le contexte de la mécanique classique, il a été montré [3] que lorsque ce paramètre tend vers zéro, c'est à dire dans la limite quasi-neutre, le système de Vlasov–Poisson a pour limite les équations d'Euler. Elles décrivent les électrons de façon fluide, c'est à dire par leur densité et leur vitesse moyenne. C'est un modèle macroscopique où les quantités physiques interviennent directement, en contraste avec la description cinétique (dans l'espace des phases) où les densités macroscopiques sont obtenues par des intégrales par rapport à la variable cinétique. Dans le contexte de la mécanique quantique, la limite semiclassique quasi-neutre du système de Schrödinger–Poisson vers les équations d'Euler est établie dans [14]. Les limites représentées sur le diagramme suivant (figure 2) ont donc toutes été rigoureusement établies :

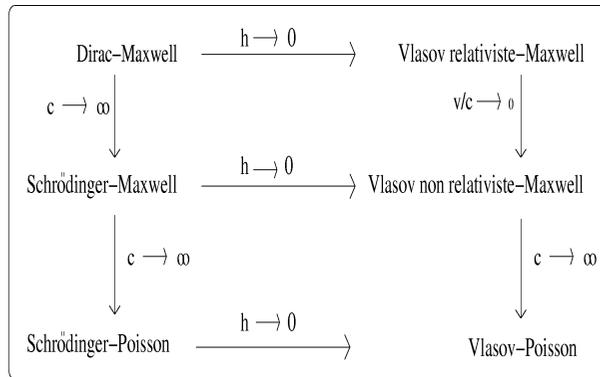


Figure 1.

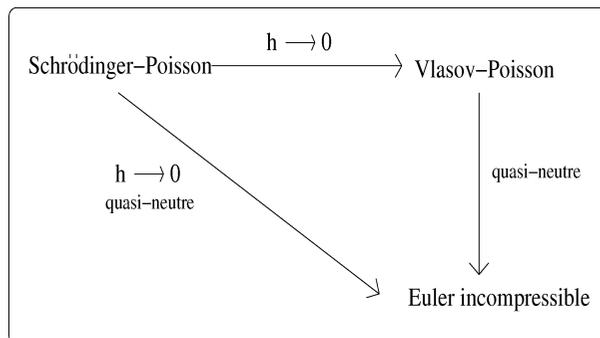


Figure 2.

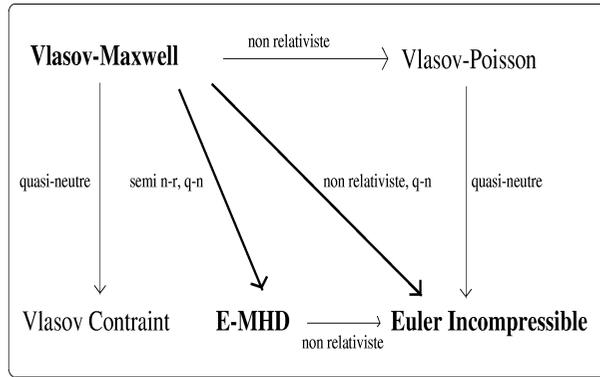


Figure 3.

Le premier résultat nouveau que nous annonçons ici est que la limite quasi-neutre non relativiste du système de « Vlasov non relativiste »–Maxwell est donnée par les équations d’Euler des fluides incompressibles.

Pour montrer ce résultat, nous employons la méthode de l’énergie modulée utilisée dans [3]. L’idée de base est d’estimer une quantité définie à partir de l’énergie en remplaçant l’énergie cinétique  $\int |\xi - v|^2 f \, d\xi$  par  $\int |\xi - v|^2 f \, d\xi$  avec  $v$  destinée à être une solution de l’équation limite.

Les systèmes dont nous avons parlé sont des modèles où les effets du champ magnétique sont relativistes, c.a.d. le champ magnétique résulte du fait que la vitesse de la propagation est bornée et ce champ disparaît donc dans la limite non relativiste.

Considérons à présent un système d’équations cinétiques avec un scaling différent, choisi de telle sorte que l’effet du champ magnétique n’est pas un effet relativiste. De la même manière que dans le cas du système de Vlasov–Maxwell avec un champ magnétique relativiste, nous montrons que ce système converge dans une limite quasi-neutre non relativiste vers un système proche des équations d’Euler où la force qui accélère les particules est une force Lorentzienne (électromagnétique). Ce système a été étudié par D. Holm dans [8] sous le nom de *electron-MHD*. Dans la section suivante, nous enonçons le résultat obtenu après avoir présenté les systèmes impliqués dans le diagramme suivant (figure 3).

## 2. Résultats

Nous étudions le système de Vlasov–Maxwell (1) avec deux scalings différents (cf. [4,2] pour les détails du scaling).

Les inconnues sont la fonction de répartition  $f^\varepsilon(t, x, \xi)$  et les champs électro-magnétiques  $E^\varepsilon$  et  $B^\varepsilon$ , où la dépendance du petit paramètre  $\varepsilon$  est notée explicitement.

Le paramètre  $\alpha$  correspond à l’inverse de la vitesse de la lumière :  $\alpha \simeq 1/c$ . Alors le premier scaling ( $\alpha = \varepsilon$ ) correspond au cas où l’effet du champ magnétique est considéré comme un effet relativiste, tandis que le deuxième scaling ( $\alpha = 1$ ) correspond au cas où le champ magnétique est non relativiste. L’hypothèse de neutralité est une hypothèse fondamentale pour obtenir un champ incompressible à la limite.

Selon le scaling, nous obtenons les systèmes limites suivants :

- dans le cas  $\alpha = \varepsilon$ , le système limite est constitué par les équations d’Euler (3)–(5) ;
- dans le cas  $\alpha = 1$ , le système limite est le système de la magnéto-hydrodynamique (e-MHD, cf. [8]) donné par (6)–(8).

Ce système est une variante des équations d’Euler. Les termes impliquant le champ  $B$  étant d’ordre inférieur, on peut s’assurer de l’existence de solutions régulières de ce système, au moins localement en temps.

Remarquons que, pour les deux scalings, en passant du cadre cinétique au cadre fluide, nous faisons l'hypothèse que la « température » électronique tend vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. (Voir remarque plus bas.) De plus, pour simplifier les démonstrations, suivant [3] nous nous limitons au cas de solutions périodiques en espace ( $x \in D = \frac{\mathbb{R}^d}{\mathbb{Z}^d}$ ). Enfin, dans le cas ( $\alpha = \varepsilon$ ), les équations limites seront satisfaites au sens des solutions dissipatives de P.-L. Lions [9]. Dans le cas de la e-MHD, on obtient une convergence vers les solutions régulières du système.

*Remarque 2.1.* – Nous introduisons les systèmes intermédiaires cités dans la figure 3.

Rappelons tout d'abord que la limite non relativiste ( $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon$  fixé dans (1)) du système de Vlasov–Maxwell est le système de Vlasov–Poisson donné par

$$\begin{aligned} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \nabla \phi^\varepsilon \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon &= 0, \\ \varepsilon \Delta \phi^\varepsilon &= \rho^\varepsilon - 1. \end{aligned} \tag{9}$$

De plus, formellement, la limite quasi-neutre du système de « Vlasov non relativiste »–Maxwell (1) avec  $\alpha = 1$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f - (E - (\xi \wedge B)) \cdot \nabla_\xi f &= 0, \\ -\partial_t B + \text{curl } E &= 0, \quad \rho = 1, \\ \text{curl } B = j, \quad \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous appelons ce système « Vlasov non relativiste »–Maxwell contraint. Son étude semble très difficile, c'est pourquoi nous considérons le cas particulier de solutions à température nulle, qui sont précisément régies par les équations de la e-MHD, au moins localement en temps. C'est pour cela que nous limitons notre analyse à des solutions du système de Vlasov–Maxwell avec température initiale évanescence. Enfin, si à partir de la e-MHD, en réintroduisant  $\alpha$  dans (6)–(8), on retrouve naturellement, dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$ , les équations d'Euler des fluides incompressibles.

**THÉORÈME 2.1.** – Soient  $T > 0$ ,  $D = \frac{\mathbb{R}^d}{\mathbb{Z}^d}$  et  $j_0(x)$ , un champ de vecteur à divergence nulle, périodique en  $x$  et appartenant à  $L^2(D)$ . Soient  $f^\varepsilon(t, x, \xi) \geq 0$ ,  $E^\varepsilon(t, x)$ ,  $B^\varepsilon(t, x)$  solutions du système de « Vlasov non relativiste–Maxwell » avec  $\alpha = \varepsilon$ . On les suppose régulières jusqu'au temps  $T$  et telles que leurs données initiales satisfont

$$\int f^\varepsilon(0, x, \xi) \, dx \, d\xi = 1, \tag{11}$$

$$\varepsilon \int |E^\varepsilon(0, x)|^2 \, dx \rightarrow 0, \tag{12}$$

$$\text{et } \int |B^\varepsilon(0, x)|^2 \, dx \rightarrow 0 \tag{13}$$

pour tout champ test à divergence nulle  $v_0(x)$ ,

$$\int |\xi - v_0(x)|^2 f^\varepsilon(0, x, \xi) \, dx \, d\xi \rightarrow \int |j_0(x) - v_0(x)|^2 \, dx, \tag{14}$$

alors, à extraction de sous-suite près,  $j^\varepsilon$  converge au sens vague des mesures vers  $j$ , une solution dissipative des équations d'Euler (3)–(5) au sens de P.-L. Lions avec donnée initiale  $j_0$ . Si  $j_0$  est régulière (et le temps  $T$  assez petit si  $d \geq 3$ ), alors toute la famille converge vers l'unique solution classique des équations d'Euler avec donnée initiale  $j_0$ .

*Remarque 2.2.* – Les solutions dissipatives des équations d'Euler coïncident avec les solutions régulières des équations d'Euler tant que ces dernières existent.

THÉORÈME 2.2. – Soient  $T > 0$  et  $j_0, B_0$  deux champs de vecteur à divergence nulle, réguliers et périodiques en  $x$ . Soient  $f^\varepsilon(t, x, \xi) \geq 0$ ,  $E^\varepsilon(t, x)$ ,  $B^\varepsilon(t, x)$  solutions du système de « Vlasov non relativiste »–Maxwell avec  $\alpha = 1$ . On les suppose régulières jusqu’au temps  $T$  et telles que leurs données initiales satisfont

$$\int f^\varepsilon(0, x, \xi) dx d\xi = 1, \tag{15}$$

$$\varepsilon \int |E^\varepsilon(0, x)|^2 dx \rightarrow 0, \tag{16}$$

$$\int |B^\varepsilon(0, x) - B_0(x)|^2 dx \rightarrow 0 \tag{17}$$

et pour tout champ de vecteur test à divergence nulle  $v_0(x)$ ,

$$\int |\xi - v_0(x)|^2 f^\varepsilon(0, x, \xi) dx d\xi \rightarrow \int |j_0(x) - v_0(x)|^2 dx. \tag{18}$$

Si  $(j, B)$  est l’unique solution régulière du système (6)–(8) jusqu’au temps  $T$  avec comme conditions initiales  $(j_0, B_0)$ , alors  $j^\varepsilon$  converge au sens vague des mesures vers  $j$  et  $B^\varepsilon$  converge dans  $L^\infty([0, T], L^2(D))$ - $w^*$  vers  $B$ .

**Remerciements.** Les auteurs remercient le soutien financier du réseau européen TMR « Asymptotic Methods in Kinetic Theory », du projet START (FWF, TEC-Y-137) de N.J.M et du programme bilatéral Austro-Français « Amadeus ». Y.B. remercie D. Holm pour ses informations précieuses sur la « e-MHD » [8].

### Références bibliographiques

- [1] K. Asano, S. Ukai, On the Vlasov–Poisson limit of the Vlasov Maxwell equation, *Pattern and Waves* (1986) 369–383.
- [2] P. Bechouche, N.J. Mauser, F. Poupaud, (Semi)-nonrelativistic limits of the Dirac equation with external time-dependent electromagnetic field, *Comm. Math. Phys.* 197 (1998) 405–425.
- [3] Y. Brenier, Convergence of the Vlasov–Poisson system to the incompressible Euler equations, *Comm. Partial Differential Equations* 25 (2000) 737–754.
- [4] Y. Brenier, N.J. Mauser, M. Puel, Incompressible Euler and e-MHD as scaling limits of the Vlasov–Maxwell system, to be submitted to *Comm. Math. Phys.* (2001).
- [5] P. Degond, Local existence of solutions of the Vlasov–Maxwell equations and convergence to the Vlasov–Poisson equations for infinite light velocity, *Math. Methods Appl. Sci.* 8 (1986) 533–558.
- [6] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser, F. Poupaud, Homogenization limits and wigner transforms, *Comm. Pure Appl. Math.* 50 (1997) 321–377.
- [7] Y. Guo, K. Nakamitsu, W. Strauss, Global finite-energy solutions of the Maxwell–Schrödinger system, *Comm. Math. Phys.* 170 (1995) 181–196.
- [8] D.D. Holm, Notes on electron MHD vs Euler-alpha, Private communication.
- [9] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 1. Incompressible Models*, Oxford Lecture in Math. Appl., Oxford University Press, 1996.
- [10] P.-L. Lions, T. Paul, Sur les mesures de Wigner, *Rev. Mat. Iberoamericana* 9 (1993) 553–618.
- [11] P.A. Markowich, N.J. Mauser, The classical limit of a self-consistent quantum-Vlasov equation in 3-d, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 9 (1993) 109–124.
- [12] N. Masmoudi, N.J. Mauser, The self-consistent Pauli equation, *Monatsh. Math.* 132 (2001) 19–24.
- [13] N.J. Mauser, Nonrelativistic limits of the Dirac equation with non-static field: first and second order corrections, *Trans. Theory Statist. Phys.* 29 (2000) 122–137.
- [14] M. Puel, Convergence of the Schrödinger–Poisson system to the incompressible Euler equations (2001) (submitted).
- [15] J. Schaeffer, The classical limit of the relativistic Vlasov–Maxwell system, *Comm. Math. Phys.* 104 (1986) 403–421.
- [16] P. Zhang, Y. Zheng, N.J. Mauser, Classical limit from Schrödinger–Poisson to Vlasov–Poisson equations for general initial data including the pure state case, in 1-d, *Comm. Pure Appl. Math.* (2001) (to appear).