

Analyse numérique d'une méthode multi-fluide Eulérienne pour la description de sprays qui s'évaporent

Frédérique Laurent

CNRS, MAPLY-UMR 5585, Laboratoire de Math. Appli. de Lyon, Université Claude Bernard, Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 22 octobre 2001 ; accepté le 26 novembre 2001

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé

Cette Note concerne l'analyse numérique d'une méthode multi-fluide Eulérienne pour la description de sprays polydispersés qui s'évaporent et ce, sur une configuration stationnaire 1D, sans effet dynamique ni thermique où seul l'aspect évaporation subsiste. L'espace des phases se réduit alors à la position et la taille des gouttes. On donne les conditions sous lesquelles la méthode est d'ordre 1 en le pas de discrétisation de la taille de goutte. D'autre part, la stabilité du θ -schéma pour la discrétisation en espace ainsi que la positivité des variables nécessitent des conditions CFL précisées ici. On donne ainsi le « bon choix » de la variable taille de goutte et de la discrétisation en cette variable. **Pour citer cet article :** *F. Laurent, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 417–422.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Numerical analysis of a Eulerian multi-fluid method for the description of evaporating sprays

Abstract

In this Note, we investigate the numerical analysis of a Eulerian multi-fluid model for the description of vaporizing liquid sprays. The study is conducted in a stationary 1D-configuration without dynamical nor heating effects, where the vaporization process is isolated. The phase space is then reduced to the space and droplet size variables. The conditions under which the model provides a first order method in the size discretization step are provided. We then study the stability conditions of the θ -schemes for the space discretization, as well as the positivity condition and the associated CFL conditions. This yields a justification of the “right” choice for the droplet size variable and for the discretization in this variable. **To cite this article:** *F. Laurent, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 417–422.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In a lot of industrial combustion applications such as Diesel engines, fuel is stocked in condensed form and injected as a spray (spray is understood as a dispersed phase of liquid fuel droplets, i.e., where the liquid volume fraction is much smaller than one) carried by a gaseous flow. Two phase effects and more specifically the poly-disperse character of the droplet distribution in sizes can significantly influence the

Adresse e-mail : laurent@maply.univ-lyon1.fr (F. Laurent).

flame structures, even in the case of relatively thin sprays [7]. The key point is then to determine which amount of mass is transferred from the liquid phase into the gaseous one through the vaporization process.

In this context, Eulerian multi-fluid models have been recently studied [3,6,8,5]. The kinetic equation (pdf equation [9]) is averaged over velocity and temperature and yields a semi-kinetic model: at each droplet size we obtain a set of conservation equations for the mean density, momentum and temperature. The continuous size phase space is then discretized using a finite volume formulation, the size intervals being called the sections in reference to [2]. The obtained set of conservation equations then describes the evolution of mass density, momentum and temperature in each section. The derivation from the kinetic level has been performed in [3] for dilute sprays and extended to dense sprays where coalescence is taking place in [5]. The model has been validated for dilute sprays using comparisons with experimental measurements in the configuration of counterflow spray diffusion flames [7,6] and with the classical Lagrangian approach [3].

This model, however, was used without any rigorous justification of the accuracy and of the choice of the droplet size variable and discretization. It is essential, for practical application, to understand and describe the droplet vaporization process and its effect on the gaseous fuel mass fraction. In order to isolate this vaporization process, we consider the framework introduced in [1,3]: a stationary 1D-configuration without dynamical nor heating effects of a poly-disperse spray vaporizing in a hot gas. The numerical analysis of the Eulerian multi-fluid method is then conducted in this configuration for which an analytical solution is available.

We recall the kinetic formulation where the phase space is reduced to the space and droplet size variables. We also recall the semi-discretized finite volume scheme for the Eulerian multi-fluid model (3). The order of this scheme is given in Theorem 3.1; it is shown to be of order one under some compatibility conditions. In the case of θ -schemes for the space discretization, the corresponding CFL conditions for stability (Theorem 4.2) and positivity of the droplet mass densities (Theorem 4.3) are provided. These results yield a justification of the “right” choice for the droplet size variable: the surface, and for the discretization in this variable.

1. Introduction

La modélisation des sprays (par spray, nous entendons une phase liquide dispersée sous forme de gouttelettes, i.e. dont la fraction volumique est petite devant un) revêt une importance particulière dans le cadre de la propulsion par combustion où la plupart des fuels utilisés sont stockés sous forme condensée. La détermination précise de la quantité de masse de fuel fournie au gaz par les gouttelettes est essentielle et repose sur une bonne représentation de la polydispersion en taille du brouillard : en effet, ces facteurs influencent fortement la structure des flammes diphasiques considérées, même dans le cas de brouillards dilués [7].

C’est dans ce contexte que les modèles multi-fluides Eulériens ont été étudiés récemment [3,6,8,5] : on considère une méthode de moments en vitesse et température, l’espace des phases en taille de goutte étant quant à lui discrétisé par volumes finis sur la masse, avec contrainte de moment, l’intervalle choisi étant dénommé section en référence à [2]. L’évolution de la densité massique de chaque section, ainsi que de la vitesse moyenne et de la température moyenne correspondantes sont alors calculées directement grâce à des équations de conservation, obtenues à partir d’un niveau cinétique de description [9,2,3,8,5]. Pour le cas des sprays dilués, où les collisions peuvent être négligées, la dérivation rigoureuse du modèle à partir du niveau cinétique a été obtenue dans [3] et le modèle validé sur des flammes de diffusion diphasique laminaires par comparaisons expérimentales [7,6] et comparée numériquement à une approche classique d’échantillonnage [3].

Cependant, cette méthode a été utilisée jusqu’à maintenant sans aucune réelle justification quant à sa précision ou au choix de la discrétisation en taille. Un facteur essentiel est l’évaporation des gouttes : il

est important de comprendre comment il agit sur la masse de fuel en phase vapeur. Pour mieux isoler ses effets, on considère donc la configuration, déjà introduite dans [1,3], d'un écoulement 1D, stationnaire, sans effet dynamique ni thermique : l'évaporation d'un spray poly-dispersé dans un gaz chaud où les gouttelettes sont injectées à la température d'équilibre. On se propose ici de mener l'analyse numérique de la méthode multi-fluide Eulérienne dans ce cas qui a l'avantage de présenter une solution analytique.

Dans un premier temps, nous rappelons, dans la configuration étudiée, le modèle cinétique et le schéma de la méthode multi-fluide Eulérienne qui permet une approximation des densités massiques de goutte pour chaque section. Puis on détermine l'ordre de cette méthode multi-fluide. Dans le cas de θ -schémas pour la discrétisation en espace, on donne des conditions sur le pas d'espace et de taille de goutte qui permettent la stabilité du schéma et la positivité des variables. Ces résultats suggèrent et justifient la « bonne » façon de discrétiser l'espace des phases correspondant à la taille de goutte et la « bonne variable » de taille à considérer.

2. Modèle cinétique et méthode multi-fluide Eulérienne pour la configuration étudiée

On considère une configuration purement 1D où le spray poly-dispersé est injecté dans un gaz chaud, de manière stationnaire. Le gaz est à vitesse constante u , sa composition et sa température sont aussi constantes (on ne tient pas compte de l'influence du liquide sur le gaz dans la mesure où seule la description de l'évaporation des gouttes nous intéresse). Le spray, quant à lui, est injecté à la même vitesse que le gaz et reste donc en équilibre dynamique. De plus, on suppose que les gouttelettes sont initialement à la température d'équilibre et restent donc à cette température. Seule reste à considérer l'évaporation.

On veut donc comparer, sur cette configuration, le modèle cinétique pour lequel on a une solution analytique, et l'approche multi-fluide Eulérienne qui permet une approximation des densités massiques de goutte pour chaque section, variables importantes pour décrire l'évaporation.

2.1. Modèle cinétique

Les gouttes ont toutes la même vitesse et la même température et l'écoulement est stationnaire. On considère donc la densité $f^\phi(x, \phi)$ de gouttes au point x en fonction de leur taille ϕ , où ϕ représente le rayon R , la surface S ou le volume V ($f^R dR = f^S dS = f^V dV$). D'autre part, d'après la loi du d^2 , à vitesse, température et composition du gaz constantes, la surface de la goutte décroît linéairement (i.e. le taux R_S de variation de surface dû à l'évaporation est constant). Le paramètre $a = R_S/u$ est alors une constante et l'équation de Williams [9] se réduit alors à :

$$\partial_x f^S - a \partial_S f^S = 0. \quad (1)$$

On remarquera que la variable d'espace x joue le rôle attribué habituellement au temps.

On notera la condition « initiale » $f^S(x = 0, S) = f_0(S)$, où f_0 est une fonction qui sera supposée au moins C^2 et à support compact (toutefois cette étude se généralise au cas où f_0 est exponentiellement décroissante à l'infini, comme dans [6]). La solution de l'équation d'advection (1) à vitesse constante est alors $f^S(x, S) = f_0(S + ax)$.

Cependant, on ne s'intéresse pas directement à la distribution f^ϕ mais plutôt à la densité massique de gouttes m et aussi aux densités massiques m_i dans des sections $[\phi_{i-1}, \phi_i]$. Elles sont définies par :

$$m_i(x) = \rho_l \int_{\phi_{i-1}}^{\phi_i} V(\phi) f^\phi(x, \phi) d\phi, \quad m(x) = \sum_{i=1}^{N+1} m_i(x) = \rho_l \int_0^{+\infty} V(\phi) f^\phi(x, \phi) d\phi, \quad (2)$$

où $V(\phi)$ est le volume correspondant à ϕ (on notera de même $S(\phi)$ et $R(\phi)$ la surface et le rayon correspondant à ϕ) et ρ_l est la densité volumique du liquide. Dans la suite, on note Ψ la variable en laquelle les sections $[\Psi_{i-1}, \Psi_i]$ réalisent une partition uniforme de $[0, \Psi_N]$ avec pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$,

$\Psi_i = i \Delta \Psi$; Ψ_N est tel que $[0, S(\Psi_N)]$ contienne le support de f_0 . On supposera que $\Psi = R^\alpha$ avec $\alpha > 0$ (c'est par exemple, à un facteur multiplicatif près, le rayon, la surface ou le volume des gouttes).

2.2. L'approche multi-fluide Eulérienne

L'approche multi-fluide Eulérienne est une méthode de type volumes finis qui donne une approximation \tilde{m}_i des m_i par le schéma semi-discrétisé suivant :

$$\partial_x \tilde{m}_i(x) = F_{i+1} \tilde{m}_{i+1}(x) - (F_i + M_i) \tilde{m}_i(x), \quad \tilde{m}_i(0) = m_i(0). \tag{3}$$

Le terme en M_i représente le flux de masse entre la section i et le gaz. Le terme en F_i représente le flux de masse entre la section i et la section $i - 1$. Ces coefficients M_i et F_i sont déterminés par un choix préliminaire de la forme κ_i^ϕ de la fonction de distribution dans chaque section : la fonction de distribution f^ϕ en x est approchée par $\kappa_i^\phi(\phi) \tilde{m}_i(x)$ pour $\phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i[$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad F_i = a \rho_l \frac{V(\phi_{i-1})}{S'(\phi_{i-1})} \kappa_i^\phi(\phi_{i-1}), \quad M_i = \frac{a \rho_l}{2} \int_{\phi_{i-1}}^{\phi_i} R(\phi) \kappa_i^\phi(\phi) d\phi \tag{4}$$

et $F_{N+1} = 0$; les fonctions κ_i^ϕ vérifient :

$$\rho_l \int_{\phi_{i-1}}^{\phi_i} V(\phi) \kappa_i^\phi(\phi) d\phi = 1. \tag{5}$$

La forme de la fonction f^ϕ pouvant varier, on choisit κ_i^ϕ constant dans la section. Reste à déterminer pour quelle variable ϕ ($\kappa_i^R dR = \kappa_i^S dS = \kappa_i^\phi d\phi$). On se place dans le cas général où $\phi = R^\beta$ avec $\beta > 0$.

3. Ordre du schéma semi-discrétisé

On commence par déterminer l'ordre du schéma semi-discrétisé (3). Il nous faut donc évaluer les erreurs locales γ_i :

$$\gamma_i(x) = \partial_x m_i(x) + (F_i + M_i) m_i(x) - F_{i+1} m_{i+1}(x), \tag{6}$$

où les m_i ont été définis au paragraphe 2.1. Pour calculer l'ordre global (c'est à dire l'ordre pour le calcul de la densité massique totale du spray), il faudra évaluer $\gamma(x) = \sum_i \gamma_i(x)$. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Supposons que $f^\phi(x, \cdot)$ est une fonction C^2 en ϕ sur \mathbb{R}^+ , quel que soit $x \geq 0$. Le schéma semi-discrétisé (3) est d'ordre 1 en $\Delta \Psi$ si $2\beta + 1 - \alpha > 0$. Sinon, pour $2\beta + 1 - \alpha < 0$, le schéma est d'ordre $(2\beta + 1)/\alpha < 1$ et pour $2\beta + 1 - \alpha = 0$, on a $\gamma(x) = O(\Delta \Psi \ln \Delta \Psi)$. Pour $\alpha = \beta$, on a un ordre local 2 en $\Delta \Psi$. Plus précisément :*

$$|\gamma_i(x)| \leq \frac{a \rho_l}{6} \Psi_N^{1/\alpha} \left((10 + \alpha) \left\| \frac{\partial f^\phi}{\partial \phi} \right\|_\infty + \frac{\alpha}{2} \left(\Psi_N + \frac{3}{\alpha} \Delta \Psi \right) \left\| \frac{\partial^2 f^\phi}{\partial \phi^2} \right\|_\infty \right) (\Delta \Psi)^2. \tag{7}$$

Démonstration. – On se limite ici au cas $\alpha = \beta$ (et donc $\Psi = \phi$). On introduit une fonction continue \bar{g} qui va coïncider en Ψ_{i-1} avec la différence $g_i(x, \Psi) = f^\Psi(x, \Psi) - m_i(x) \kappa_i^\Psi(\Psi)$ entre les distributions réelle et approchée :

$$\bar{g}(x, \Psi) = f^\Psi(x, \Psi) - \frac{\int_{\Psi}^{\Psi+\Delta \Psi} \sigma^{3/\beta} f^\Psi(x, \sigma) d\sigma}{\int_{\Psi}^{\Psi+\Delta \Psi} \sigma^{3/\beta} d\sigma}. \tag{8}$$

Après diverses manipulations, on obtient γ_i en fonction de \bar{g} :

$$\gamma_i(x) \frac{6}{\rho l a} = \alpha \int_{\Psi_{i-1}}^{\Psi_i} \Psi^{1+1/\alpha} \partial_{\Psi} \bar{g}(x, \Psi) d\Psi + (1 + \alpha) \int_{\Psi_{i-1}}^{\Psi_i} \Psi^{1/\alpha} \bar{g}(x, \Psi) d\Psi - 3 \int_{\Psi_{i-1}}^{\Psi_i} \Psi^{1/\alpha} g_i(x, \Psi) d\Psi. \quad (9)$$

En utilisant des égalités de type Taylor–Lagrange, on peut majorer $|\Psi^{1+1/\alpha} \partial_{\Psi} \bar{g}(\Psi)|$, $|\bar{g}(x, \Psi)|$ et $|g_i(x, \Psi)|$ par des termes d’ordre 1 en $\Delta\Psi$. On obtient l’estimation de l’erreur local de troncature donnée dans le théorème. Et, on a donc une erreur globale d’ordre 1 : $\gamma(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(x) = O(\Delta\Psi)$. \square

Remarque 1. – On a la relation entre f^ϕ et f_0 : $f^\phi(x, \phi) = \frac{8\pi}{\beta} \phi^{2/\beta-1} f_0(4\pi\phi^{2/\beta} + ax)$. Ainsi, $f^\phi(x, \cdot)$ est à support compact et l’hypothèse sur sa régularité suffit pour que ses dérivées d’ordre 1 et 2 en ϕ soient bornées. D’autre part, cette hypothèse est automatiquement vérifiée pour $\beta = 1$, $\beta = 2$ ou $\beta \leq 2/3$. Sinon, sans hypothèse supplémentaire sur f_0 , la régularité de $f^\phi(x, \cdot)$ en $\phi = 0$ est remise en cause.

4. Théta-schéma : stabilité et positivité

On introduit la discrétisation en x : $x_k = k\Delta x$ avec $\Delta x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Le θ -schéma correspondant à (3) permet d’obtenir une approximation \widehat{m}_i^k des $m_i^k = m_i(x_k)$ par :

$$\frac{\widehat{m}_i^{k+1} - \widehat{m}_i^k}{\Delta x} = F_{i+1} [\theta \widehat{m}_{i+1}^{k+1} + (1 - \theta) \widehat{m}_{i+1}^k] - (F_i + M_i) [\theta \widehat{m}_i^{k+1} + (1 - \theta) \widehat{m}_i^k], \quad \widehat{m}_i^0 = m_i^0, \quad (10)$$

où θ est fixé entre 0 et 1. Ce schéma se met sous la forme :

$$A_\theta \widehat{m}^{k+1} = B_\theta \widehat{m}^k, \quad (11)$$

où $m^k = (m_1^k, m_2^k, \dots, m_N^k)^t$ et où les matrices A_θ et B_θ sont bidiagonales, les coefficients diagonaux étant $1 + \theta\Delta x(F_i + M_i)$ pour A_θ et $1 - (1 - \theta)\Delta x(F_i + M_i)$ pour B_θ avec $i \in \{1, \dots, N\}$; les coefficients de la diagonale supérieure sont $-\theta\Delta x F_i$ pour A_θ et $(1 - \theta)\Delta x F_i$ pour B_θ avec $i \in \{2, \dots, N\}$.

On détermine une condition de type CFL pour la stabilité du schéma (11) ainsi qu’une condition pour que le schéma donne des valeurs toujours positives des densités massiques de goutte \widehat{m}_i^k . Pour donner ces conditions, il faut tout d’abord donner une propriété sur les coefficients $M_i + F_i$ et plus précisément, sur $\mathcal{M} = \max\{M_i + F_i, i \in \{1, \dots, N\}\}$.

LEMME 4.1 (Coefficients). – Si $\alpha < 2$ alors \mathcal{M} varie comme $(\Delta\Psi)^{-2/\alpha}$.

Si $\alpha = 2$ alors $\mathcal{M} = F_1 + M_1 = \frac{3a}{8\pi} \frac{3+\beta}{1+\beta} (\Delta\Psi)^{-1}$.

Si $\alpha > 2$ alors, pour N « assez grand », on a $\mathcal{M} = F_N + M_N$ et \mathcal{M} varie comme $(\Delta\Psi)^{-1}$.

Démonstration. – Cela se montre en écrivant les coefficients sous la forme :

$$M_i + F_i = \frac{a}{8\pi} \frac{3 + \beta}{1 + \beta} (\Delta\Psi)^{-2/\alpha} \lambda(i - 1), \quad \lambda(x) = \frac{3(x + 1)^{(1+\beta)/\alpha} + (\beta - 2)x^{(1+\beta)/\alpha}}{(x + 1)^{(3+\beta)/\alpha} - x^{(3+\beta)/\alpha}} \quad (12)$$

et en étudiant la fonction λ . \square

On a le résultat de stabilité suivant, pour le schéma (11) :

THÉORÈME 4.2 (Stabilité). – Supposons que les $M_i + F_i$ sont positifs et 2 à 2 distincts.

Si $\theta \geq 1/2$, alors le schéma (11) est inconditionnellement stable.

Si $\theta < 1/2$, alors le schéma (11) est stable si et seulement si $\mathcal{M} \leq 2/((1 - 2\theta)\Delta x)$.

Démonstration. – Pour montrer ce résultat, on considère la matrice $C = A_\theta^{-1} B_\theta$. Celle-ci est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux s’écrivent :

$$c_{ii} = \varphi_\theta(F_i + M_i), \quad \varphi_\theta(y) = \frac{1 - y(1 - \theta)\Delta x}{1 + y\theta\Delta x}. \quad (13)$$

La fonction φ_θ est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ . Les $M_i + F_i$ étant 2 à 2 distincts, les c_{ii} le sont aussi. Donc C est diagonalisable, ses valeurs propres étant les c_{ii} . Ainsi, le schéma est stable si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a $|c_{ii}| \leq 1$. D'où le théorème. \square

D'après la forme du schéma (11), on démontre directement le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3 (Positivité). – *Le schéma (11) donne des valeurs positives des \widehat{m}_i^k quelles que soient les conditions « initiales » m_i^0 positives si et seulement si on a $\mathcal{M} \leq 1/((1 - \theta)\Delta x)$.*

On peut remarquer de plus que le schéma implicite ($\theta = 1$) donne toujours des valeurs positives des \widehat{m}_i^k quelles que soient les conditions « initiales » m_i^0 positives.

Le lemme 4.1 et les théorèmes 4.2 et 4.3 permettent donc de déterminer les conditions CFL pour la stabilité et la positivité pour les différentes valeurs de α et β . En particulier, dans le cas $\alpha < 2$, \mathcal{M} varie comme $\Delta\Psi^{-2/\alpha}$. On va donc avoir des conditions CFL du type $a\Delta x/\Delta\Psi^{2/\alpha}$ inférieur à une constante, c'est à dire une condition plus restrictive que dans le cas $\alpha \geq 2$. Prenons par exemple le cas $\alpha = \beta = 1$ ($\Delta\Psi = \Delta R$) couramment utilisé et comparons-le au cas $\alpha = 2$, $\beta = 1$ ($4\pi\Delta\Psi = \Delta S$). Les conditions du théorème 4.2 sont réalisées dans les deux cas, car la fonction λ du lemme 4.1 est strictement décroissante. Et quand $\theta < 1/2$, la condition de stabilité est, pour ces 2 cas :

$$a \frac{\Delta x}{\Delta S} \leq \frac{2}{3(1 - 2\theta)}, \quad \frac{a\Delta x}{4\pi(\Delta R)^2} \leq \frac{2}{3(1 - 2\theta)}. \quad (14)$$

Les conditions de positivité, quand $\theta < 1$, sont de la même forme que pour la stabilité. Ainsi, on a des conditions CFL plus restrictives dans le premier cas que dans le second.

Finalement, dans le cas général, on obtient des conditions CFL pour la stabilité et la positivité, peu restrictives pour $\alpha \geq 2$. D'autre part, parmi ces cas, on peut montrer que la précision la plus grande (c'est à dire avec un ordre 1 et la constante intervenant dans la majoration de γ minimale) est obtenue pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ [4], cas qui, par ailleurs, ne nécessite pas de régularité supplémentaire sur f_0 . C'est le meilleur compromis entre précision, stabilité et positivité. Ainsi, le cas « optimal » est une discrétisation uniforme en surface et une distribution choisie constante en rayon.

Remerciements. Je tiens à remercier Marc Massot pour m'avoir guidé tout au long de ce travail et Jean-François Maître pour ses conseils avisés.

Références bibliographiques

- [1] Domelevo K., The kinetic-sectional approach for evaporating sprays, Prépublication no 9820, MIP UMR 5640, Toulouse, 1998.
- [2] Greenberg J.B., Silverman I., Tambour Y., On the origin of spray sectional conservation equations, *Combustion and Flame* 93 (1993) 90–96.
- [3] Laurent F., Massot M., Multi-fluid modeling of laminar poly-disperse spray flames: origin, assumptions and comparison of the sectional and the sampling methods, Prépublication MAPLY, UMR 5585 Lyon, 2000, à paraître dans *Combustion Theory and Modelling*.
- [4] Laurent F., Massot M., Numerical analysis of eulerian multi-fluid models in the context of kinetic formulations for dilute evaporating sprays, 2001 (en préparation).
- [5] Laurent F., Massot M., Villedieu P., Eulerian multi-fluid modeling for the numerical simulation of polydisperse dense liquid spray, Prépublication MAPLY, UMR 5585 Lyon, 2001.
- [6] Laurent F., Santoro V., Gomez A., Smooke M.D., Massot M., Improvement of multi-fluid modeling for laminar poly-disperse spray diffusion flames: treatment of the distribution tail, computations and experiments, 2001 (en préparation).
- [7] Massot M., Kumar M., Gomez A., Smooke M.D., Counterflow spray diffusion flames of heptane: computations and experiments, in: *27th Symp. on Combustion*, The Combustion Institute, 1998, pp. 1975–1983.
- [8] Massot M., Villedieu P., Modélisation multi-fluide eulérienne pour la simulation de brouillards denses polydispersés, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 332 (2001) 869–874.
- [9] Williams F.A., Spray combustion and atomization, *Phys. Fluids* 1 (1958) 541–545.