

Simplification des cartes géographiques par minimisation de la déformation locale

Pascal J. Frey^a, Houman Borouchaki^b

^a INRIA, Projet Gamma, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, Le Chesnay cedex, France

^b Université de Technologie de Troyes, GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

Reçu le 28 mai 2001 ; accepté le 17 décembre 2001

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé

En cartographie, les régions géographiques sont usuellement représentées par des cartes régulières relativement denses correspondant à des altitudes associées aux nœuds d'un quadrillage régulier de \mathbb{R}^2 . La simplification de telles cartes est une nécessité pour faciliter à la fois le stockage, la simulation et la visualisation. Dans cette Note, on propose une nouvelle méthode de simplification basée sur une mesure de déformation locale de la surface. Celle-ci permet notamment de minimiser l'erreur d'approximation commise durant la simplification. Un exemple numérique illustre l'efficacité de cette approche. *Pour citer cet article : P.J. Frey, H. Borouchaki, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 227–232.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Terrain simplification by minimization of the local deformation

Abstract

In cartography, the geographic regions are usually represented using regular dense maps corresponding to heights values associated with the nodes of a regular grid of \mathbb{R}^2 . The simplification of such maps is an absolute requirement in order to make storage, simulation and display possible. In this Note, we propose a new simplification method based on a measure of the local deformation of the surface. The latter allows, in particular, minimization of the approximation error during the simplification. A numerical example is provided to emphasize the efficiency of this approach. *To cite this article: P.J. Frey, H. Borouchaki, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 227–232.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Maps are involved in numerous numerical or graphical simulations. In general, in this kind of application, the geometric model (a terrain, for instance) is represented by a triangulation or a grid that may contain several millions triangles or quadrilaterals. The simplification of such maps is thus required, in order to facilitate storage and transmission, as well as to make a finite element simulation or the display more efficient.

Adresses e-mail : pascal.frey@inria.fr (P.J. Frey); houman.borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki).

Several simplification methods for surface triangulations have been developed (*see* [5] for a survey), that differ mainly by the type of data and the criteria used to measure the deviation of the simplified triangulation to the initial one. Here, we consider the following problem: given \mathcal{T} the *canonical* triangulation of a map (its vertices are the images of the nodes of a regular grid \mathcal{G} of size $n \times m$ from \mathbb{N}^2 to \mathbb{R}^3 along given heights), find a simplified triangulation \mathcal{T}_s based on a ‘minimal’ subset \mathcal{V} of the vertices of \mathcal{T} in which the ‘distance’ to the map \mathcal{T} is less than or equal to a given threshold value. This gap can be quantified in two ways: continuous or discrete. The continuous measure consists in formulating this gap using the Hausdorff distance from \mathcal{T}_s to \mathcal{T} [1]. The computation of the Hausdorff measure seems here too expensive. However, the discrete measure consists in considering the gap between the vertices of the map \mathcal{T} and their orthogonal projections on the triangulation \mathcal{T}_s (this being a simplification of the continuous Hausdorff measure and seems more appropriate for terrain simplification). Formally speaking, let $z(p)$ be the height of a node p of the grid and let $u_{\mathcal{T}}$ the vector of dimension $n \times m$ of components $z(p)$, p covering the nodes of the grid and let $v_{\mathcal{T}, \mathcal{T}_s}$ be the vector of dimension $n \times m$ of components $z_s(p)$, the height of the orthogonal projection of $P = (p, z(p))$ of \mathcal{T} on \mathcal{T}_s . The problem is then to find a subset of minimal cardinality \mathcal{W} of the nodes of the grid \mathcal{G} and a triangulation \mathcal{T}_s based on the vertices images of the nodes in \mathcal{W} , such that $\delta_{\mathcal{T}_s} = \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}, \mathcal{T}_s}\|$ is less than or equal to the threshold δ , where $\|\cdot\|$ denotes a norm of \mathbb{R}^3 . As shown by [6], the triangulation \mathcal{T}_s can be considered as the image of the Delaunay triangulation of the nodes of \mathcal{W} . Thus, the simplification problem is reduced to finding the nodes of \mathcal{W} .

Our approach, different from methods based on incremental insertion (*greedy insertion*, *cf.* [3], for instance), aims at constructing the simplified triangulation \mathcal{T}_s (and thus the nodes of \mathcal{W}) by removing iteratively the vertices of the initial triangulation \mathcal{T} . At each stage, the vertex to be removed is that for which the ‘current’ deformation measure given by $\varepsilon(P) = \max_i d(P_i, \Pi(P))$ is minimal, $d(\cdot, \cdot)$ denoting the distance from a point to a plane, $\Pi(P)$ being the tangent plane at P and P_i , the vertices adjacent to P . The point removal operation consists in removing the triangles incident to this vertex (i.e., the *ball* of the vertex) and to retriangulate the resulting *cavity* using the Delaunay criterion. The simplification procedure stops as soon as the deformation measure becomes greater than a given threshold, at each vertex of the current triangulation.

1. Introduction

Les cartes interviennent dans de nombreuses simulations numériques ou graphiques. En général, dans ce type d’applications, le modèle géométrique (un terrain, par exemple) est représenté par une triangulation ou une grille qui peut comporter plusieurs millions de triangles ou quadrangles. La simplification de telles cartes est donc une nécessité, à la fois pour en faciliter le stockage et la transmission mais aussi pour accélérer un calcul par éléments finis ou la visualisation graphique.

Plusieurs méthodes de simplification de triangulations de surfaces ont été développées (*voir* [5] pour une synthèse de ces travaux), qui diffèrent notamment par la nature des données et les critères de mesure de la déviation de la triangulation simplifiée par rapport à la triangulation initiale. Nous considérons ici le problème suivant : étant donnée \mathcal{T} la triangulation *canonique* d’une carte (dont les sommets sont les images des nœuds d’une grille régulière \mathcal{G} de résolution $n \times m$ de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{R}^3 suivant des cotes données), trouver une triangulation simplifiée \mathcal{T}_s s’appuyant sur un sous-ensemble « minimal » \mathcal{V} des sommets de \mathcal{T} dont l’écart à la carte \mathcal{T} est inférieur ou égal à un seuil donné. Cet écart peut être quantifié de deux manières : continue ou discrète. La mesure continue consiste à exprimer cet écart par la distance de Hausdorff de \mathcal{T}_s à \mathcal{T} [1]. Toutefois, le calcul de la mesure de Hausdorff nous paraît très coûteux. En revanche, on peut considérer la mesure discrète exprimant l’écart entre les sommets de la carte \mathcal{T} et leur projection orthogonale sur la triangulation \mathcal{T}_s (ceci étant une simplification de la mesure continue de Hausdorff et paraît plus appropriée dans le cas des terrains). Formellement, désignons par $z(p)$ la cote d’un nœud p de

la grille et soient $u_{\mathcal{T}}$ le vecteur de dimension $n \times m$ de composante $z(p)$, p parcourant les nœuds de la grille et $v_{\mathcal{T}, \mathcal{T}_s}$ le vecteur de dimension $n \times m$ de composante $z_s(p)$, la cote de la projection orthogonale de $P = (p, z(p))$ de \mathcal{T} sur \mathcal{T}_s . Le problème consiste alors à trouver un sous-ensemble de cardinal minimal \mathcal{W} des nœuds de la grille \mathcal{G} et une triangulation \mathcal{T}_s s'appuyant sur les sommets images des nœuds de \mathcal{W} tel que $\delta_{\mathcal{T}_s} = \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}, \mathcal{T}_s}\|$ soit inférieure ou égale au seuil δ , où $\|\cdot\|$ désigne une norme de \mathbb{R}^3 . Si ce sous-ensemble \mathcal{W} est connu, Rippa [6] a montré que la triangulation de Delaunay des nœuds de \mathcal{W} dans \mathbb{R}^2 est, parmi toutes les triangulations possibles s'appuyant sur les nœuds de \mathcal{W} , celle qui a une rugosité minimale. Par conséquent, on peut se restreindre ici à la détermination de ces nœuds, la triangulation \mathcal{T}_s cherchée étant la triangulation de Delaunay de ces nœuds. Toutefois, ce problème demeure un problème NP-complet en raison de son caractère combinatoire.

Dans cette Note, nous proposons une heuristique pour construire un tel sous-ensemble \mathcal{W} . Pour cela, on s'appuie sur une nouvelle mesure de la déformation locale d'une triangulation de surface et on propose un algorithme incrémental de simplification basé sur cette mesure. Un exemple de simplification de terrain permet d'illustrer la méthode proposée.

2. Mesure de la déformation d'une triangulation de surface

La déformation locale en un sommet P d'une surface peut être quantifiée par la mesure locale de la courbure, qui représente localement la déviation par rapport au plan tangent. Dans le cas des surfaces définies par une triangulation, on peut définir la déformation en un sommet P comme l'écart maximal des sommets adjacents au plan tangent en P . Formellement, on a : $\varepsilon(P) = \max_i d(P_i, \Pi(P))$, où $d(\cdot, \cdot)$ désigne la distance d'un point à un plan, $\Pi(P)$ est le plan tangent en P et P_i parcourt les sommets adjacents à P . Si $\tilde{\Pi}(\cup_i \{P_i\})$ est le plan moyen passant par les points P_i (i.e., tel que la somme des carrés des écarts des points P_i à ce plan soit minimale), alors on peut montrer que l'écart du point P à ce plan est borné par $\varepsilon(P)$, ou encore : $d(P, \tilde{\Pi}(\cup_i \{P_i\})) \leq \varepsilon(P)$. Désignons par $\mathcal{B}(P)$ l'ensemble des triangles de la surface incidents à P et soit $\mathcal{C}(P)$ une triangulation s'appuyant uniquement sur le contour polygonal de $\mathcal{B}(P)$ (cavité associée à P). L'écart de P à $\tilde{\Pi}(P)$ représente aussi une approximation de l'écart entre la triangulation $\mathcal{B}(P)$ et la triangulation $\mathcal{C}(P)$. Ainsi, la mesure de déformation locale $\varepsilon(P)$ en P nous permet de quantifier localement l'écart entre la triangulation \mathcal{T} de la surface (contenant P) et la triangulation $\mathcal{T}_s(P) = \mathcal{T} - \mathcal{B}(P) + \mathcal{C}(P)$, une triangulation des sommets de \mathcal{T} privée de P (dépendant de la triangulation $\mathcal{C}(P)$ de la cavité obtenue par suppression de $\mathcal{B}(P)$).

La mesure de déformation locale $\varepsilon(P)$ est une mesure discrète représentant la déformation maximale au voisinage de P . Cependant, on peut introduire une autre mesure de déformation, $\bar{\varepsilon}(P)$, pour prendre en compte la moyenne des déformations au voisinage de P et qui peut être définie comme :

$$\bar{\varepsilon}(P) = \int_{p_{\pi}(\mathcal{B}(P))} d(Q, \Pi(P)) \, d\omega \Big/ \int_{p_{\pi}(\mathcal{B}(P))} d\omega,$$

où Q est l'image des points parcourant $p_{\pi}(\mathcal{B}(P))$ sur $\mathcal{B}(P)$, $d\omega$ est l'élément de surface et p_{π} la projection dans le plan tangent $\Pi(P)$.

3. Schéma général de simplification

Pour pouvoir résoudre ce problème de simplification de complexité NP-complet, on considère une approche incrémentale où à chaque itération l'écart local entre la triangulation courante et la triangulation simplifiée est minimisé en supprimant le sommet de déformation locale minimale. Cependant, cette approche ne permet pas de garantir que la triangulation finale corresponde à la triangulation d'écart globalement minimal par rapport à la triangulation initiale. En effet, la suppression d'un sommet P d'une triangulation modifie la déformation locale des sommets adjacents à P et ainsi de nouvelles déformations locales doivent être prises en compte qui n'étaient pas connues avant la suppression de P .

Notre approche, à la différence des méthodes d’insertion incrémentales (*greedy insertion*, cf. [3], par exemple), vise à construire la triangulation simplifiée \mathcal{T}_s en supprimant itérativement des sommets de la triangulation initiale \mathcal{T} . À chaque itération, le sommet à supprimer est celui dont la mesure de déformation « courante » est minimale. Cette suppression consiste à éliminer les triangles incidents en ce sommet (i.e., la *boule* du sommet), à retriangler la *cavité* obtenue selon le critère de Delaunay et à mettre à jour la mesure de déformation des sommets de la cavité obtenue en supprimant P . La procédure de simplification s’achève dès que la mesure de la déformation est supérieure à un seuil donné en tout sommet de la triangulation courante. Pour être efficace, un tel algorithme doit s’appuyer sur des structures de données spécialisées : une queue de priorité (*heap*) est utilisée pour trier les sommets en fonction de la mesure de déformation associée. En outre, l’algorithme exploite le caractère local topologique des opérations de retriangulation (bascules d’arêtes) pour mettre à jour la mesure de déformation aux sommets de la cavité associée au point supprimé.

Comme à chaque étape la déformation locale est minimisée, une approche alternative consiste à fixer *a priori* le nombre de sommets de la triangulation simplifiée \mathcal{T}_s . Ainsi, ce nombre étant fixé, on peut calculer *a posteriori* le seuil δ résultant.

4. Suppression d’un sommet

L’algorithme général repose sur une opération locale, la suppression d’un sommet. Cette opération nécessite d’éliminer tous les triangles incidents au sommet considéré et de trianguler la cavité ainsi obtenue. Formellement, si P est le sommet à supprimer, la triangulation « simplifiée » de P est donc définie par : $\mathcal{T}_s(P) = \mathcal{T} - \mathcal{B}(P) + \mathcal{C}(P)$. La triangulation $\mathcal{C}(P)$ est *a priori* quelconque et peut être construite comme image de la triangulation $\mathcal{C}(p)$ dans \mathbb{R}^2 . Cependant, parmi toutes les triangulations possibles de $\mathcal{C}(p)$, la triangulation de Delaunay [2,4] est celle dont la rugosité est minimale [6]. Pour une triangulation T de \mathbb{R}^2 , la rugosité de son image suivant une fonction cartésienne z appliquée aux nœuds, peut être définie comme : $\|z\|_{T,1}^2 = \sum_{K \in T} \int_K \|\nabla z(p)\|^2 \, d\omega$, au sens de la semi-norme de Sobolev $\|\cdot\|_{T,1}$.

On se propose de construire la triangulation de Delaunay de $\mathcal{C}(p)$ à partir de $\mathcal{B}(p)$ par suppression itérative des arêtes de $\mathcal{B}(p)$ incidentes à p . La suppression d’une telle arête s’effectue par une bascule de cette arête entre ses triangles adjacents, si le triangle résultant ne contenant pas p vérifie le critère de Delaunay. En d’autres termes, un triangle de $\mathcal{C}(p)$ est construit si son cercle circonscrit ne contient aucun des autres nœuds du contour de $\mathcal{B}(p)$. Le schéma de suppression de p s’écrit alors comme (*voir* Fig. 1) :

- tant que $\text{Card}(\mathcal{B}(p)) > 3$ faire
 - choisir une arête pp_i commune aux deux triangles $pp'_i p''_i$ et $pp_i p'_i$,
 - si le cercle circonscrit à $p'_i p_i p''_i$ ne contient strictement aucun nœud de $\mathcal{B}(p)$ différent de p , alors basculer l’arête pp_i (i.e., échanger les paires de triangles $pp'_i p''_i$ et $pp_i p'_i$ par $pp'_i p''_i$ et $p'_i p_i p''_i$), et mettre à jour $\mathcal{B}(p)$;
- remplacer les 3 triangles de $\mathcal{B}(p)$ par un seul triangle ne contenant pas p comme sommet (dans certains cas, $\mathcal{B}(p)$ est réduit à 2 (nœud frontalier) ou à 4 (configuration dégénérée) triangles).

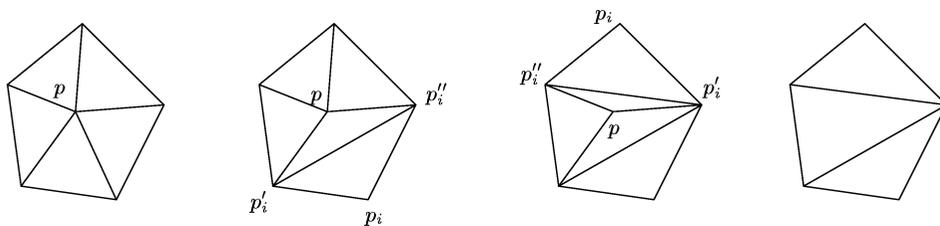


Figure 1. – La triangulation an Delaunay.

Figure 1. – Delaunay’s triangulation.

5. Exemple

La méthode proposée a été implémentée et testée sur divers modèles de terrains et de surfaces cartésiennes. On considère ici un exemple de modèle réel de carte géographique représentant la partie Est de la région du Grand Canyon (Nevada, États Unis), de résolution $1\,201 \times 1\,201$ (1 442 401 nœuds et 2 880 000 triangles), dans lequel les altitudes varient de 548 à 2 838 mètres (*cf.* Fig. 2). La Fig. 3 montre les triangulations simplifiées de la carte. La Fig. 4 montre la simplification de cette carte pour une déformation locale maximale de $\delta = 20$ mètres. La triangulation correspondante comprend 94 929 sommets, soit une réduction de 93,42%. La simplification a duré 41,7 secondes sur un PC (INTEL Pentium 4 à 1,4 Ghz). L'écart moyen δ_2 (pour la norme L_2 normalisée) de la triangulation simplifiée à la triangulation originale est de : $\delta_2 = \delta_{T_s} / (n \times m) = 2,0$. La Fig. 5 correspond à une simplification dont le nombre de sommets a été fixé à 30 000 nécessitant 43 secondes sur la même machine. De même, l'écart moyen est de 6,3 et

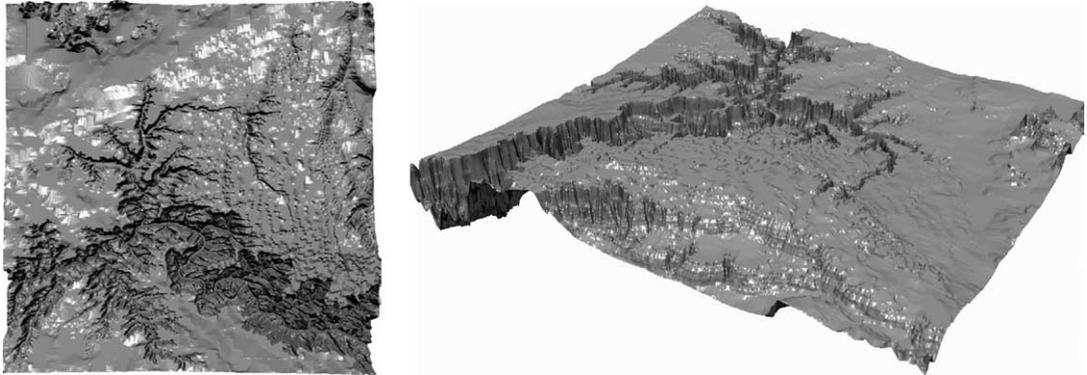


Figure 2. – Grand Canyon, terrain d'origine, vues de dessus et de profil.

Figure 2. – Grand Canyon, original terrain, top and side views.

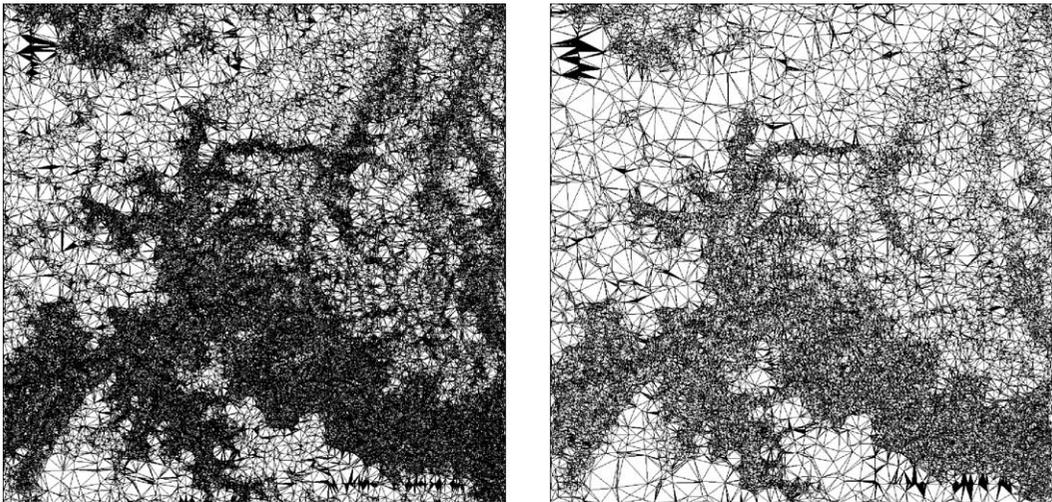


Figure 3. – Les triangulations 2D simplifiées des cartes.

Figure 3. – The 2D simplified triangulations of the maps.

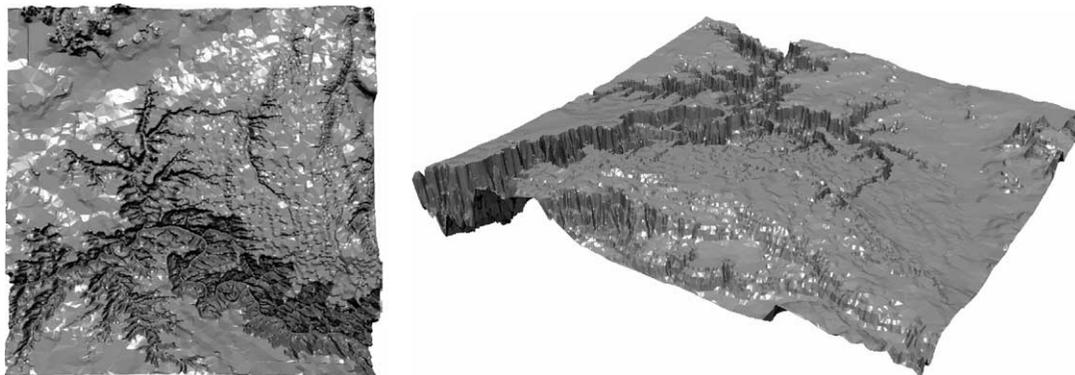


Figure 4. – Simplification à $\delta = 20$.

Figure 4. – Simplification with $\delta = 20$.

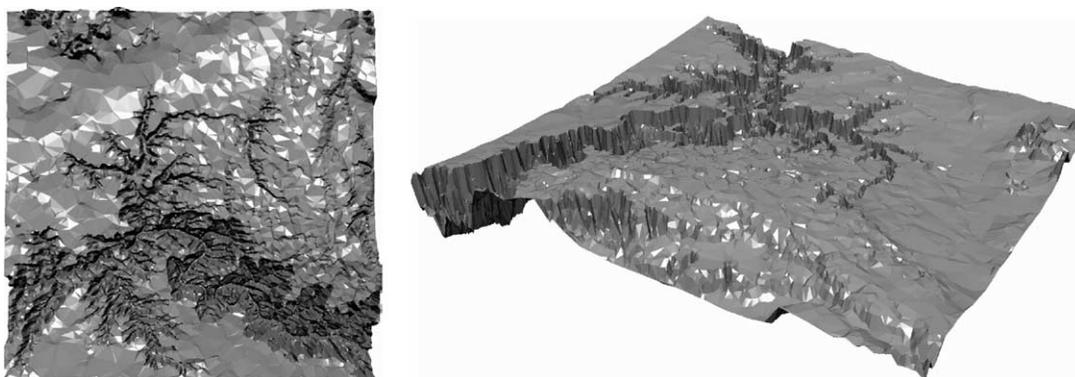


Figure 5. – Simplification à 30 000 nœuds.

Figure 5. – Simplification with 30 000 nodes.

correspond à $\delta = 59,5$. Sur ces exemples, on peut remarquer que les lignes caractéristiques du terrain sont conservées lors de la simplification.

Références bibliographiques

- [1] H. Borouchaki, Simplification de maillages basée sur la distance de Hausdorff, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 329 (2000) 641–646.
- [2] P.J. Frey, P.L. George, Maillages. Applications aux éléments finis, Hermès Science, Paris, 1999.
- [3] M. Garland, P.S. Heckbert, Fast polygonal approximation of terrains and height fields, Research report, CMU-CS-95-181, 1995.
- [4] P.L. George, H. Borouchaki, Triangulation de Delaunay et maillage, Applications aux éléments finis, Hermès Science, Paris, 1997.
- [5] P.S. Heckbert, M. Garland, Survey of polygonal surface simplification algorithms, Research report, CMU-CS-97, 1997.
- [6] S. Rippa, Minimal roughness property of the Delaunay triangulation, Computer Aided Geometric Design 7 (1990) 489–497.