

Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux

Sylvain Crovisier

Département de mathématiques, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu et accepté le 8 janvier 2002

Note présentée par Jean-Christophe Yoccoz.

Résumé

Nous montrons sur un exemple qu'il existe des ensembles hyperboliques qui ne sont contenus dans aucun ensemble hyperbolique localement maximal. *Pour citer cet article : S. Crovisier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 401–404.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A remark on locally maximal hyperbolic sets

Abstract

On an example we show that there exist some hyperbolic sets which are not contained in any locally maximal hyperbolic set. *To cite this article: S. Crovisier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 401–404.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Dans cette Note nous nous intéressons aux ensembles hyperboliques K d'un difféomorphisme F d'une variété riemannienne compacte M . Nous noterons d la distance induite sur M et $B(z, r)$ la boule de centre z de rayon r .

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $z \in K$, nous rappelons la définition des variétés invariantes locales respectivement stable et instable en z :

$$W_\varepsilon^s(z, F) = \{z' \in M, \forall n \in \mathbb{N}, d(F^n(z), F^n(z')) \leq \varepsilon\},$$
$$W_\varepsilon^u(z, F) = \{z' \in M, \forall n \in \mathbb{N}, d(F^{-n}(z), F^{-n}(z')) \leq \varepsilon\}.$$

Nous rappelons également deux propriétés équivalentes que peut satisfaire un tel ensemble K (voir [5]) :

– L'ensemble K est *localement maximal* s'il existe un voisinage ouvert U de K tel que

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(U).$$

– L'ensemble K possède une *structure de produit local* s'il existe $\delta, \varepsilon > 0$ tels que pour tout couple $(z, z') \in K^2$ vérifiant $d(z, z') < \delta$, les variétés locales $W_\varepsilon^s(z, F)$ et $W_\varepsilon^u(z', F)$ s'intersectent en un point unique, contenu dans K .

Adresse e-mail : Sylvain.Crovisier@math.u-psud.fr (S. Crovisier).

Ces propriétés permettent de construire des partitions de Markov mais tous les ensembles hyperboliques ne les satisfont pas. En revanche, il n’était apparemment pas connu si tout ensemble hyperbolique est inclus dans un ensemble hyperbolique localement maximal plus gros (voir [2], Section 6.4.d, p. 272).

Nous souhaitons montrer ici que ce n’est pas toujours le cas :

THÉORÈME 1.1. – *Il existe un difféomorphisme F de classe C^∞ du tore \mathbb{T}^4 et un ensemble hyperbolique K pour F tels qu’aucun ensemble hyperbolique Λ contenant K ne soit localement maximal.*

Notre exemple reprend une construction due à M. Hirsch, C. Pugh et M. Shub (voir [4,3]) pour montrer l’existence d’ensembles non-hyperboliques robustement transitifs (voir aussi [1]).

2. Construction

Pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous notons $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n muni de sa métrique standard et $\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ le revêtement universel. Nous désignons par $\text{Diff}^\infty(\mathbb{T}^2)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ du tore \mathbb{T}^2 .

Nous considérons A_0 un difféomorphisme d’Anosov linéaire sur \mathbb{T}^2 ayant deux points fixes distincts p et q . Par exemple, A_0 peut être le difféomorphisme obtenu en quotientant l’action de l’automorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $p = \pi_2(0, 0)$ et $q = \pi_2(\frac{1}{2}, 0)$. Nous rappelons que A_0 préserve des feuilletages linéaires stable et instable \mathcal{F}_0^s et \mathcal{F}_0^u .

Il existe des flots linéaires le long des feuilletages respectivement stable et instable sur \mathbb{T}^2 (uniques à reparamétrisation linéaire de \mathbb{R} près), $\phi^s : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, $\phi^u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, nous introduisons la première projection $p_1 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ et les flots Φ^s et Φ^u qui commutent :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_t^s(z, z') = (z, \phi_t^s(z')) \quad \text{et} \quad \Phi_t^u(z, z') = (\phi_t^u(z), z').$$

Ils définissent des feuilletages linéaires \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$.

En modifiant l’application produit $F_0 = A_0 \times A_0$ près du point fixe $Q = (q, q)$, nous construisons alors un difféomorphisme F de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ comme produit croisé :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2, \quad F(z, z') = (A_0(z), \mathcal{A}_z(z')),$$

où \mathcal{A} est une application lisse $\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Diff}^\infty(\mathbb{T}^2)$. Plus précisément :

(a) Soit $U = B(q, \frac{1}{4})$ un voisinage de q dans \mathbb{T}^2 . Alors,

$$\forall (z, z') \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \setminus (U \times U), \quad \mathcal{A}_z(z') = A_0(z').$$

(b) Pour tout $z \in \mathbb{T}^2$, \mathcal{A}_z préserve le feuilletage stable \mathcal{F}_0^s de \mathbb{T}^2 .

(c) Le point Q est un point fixe hyperbolique, répulsif dans sa fibre pour F . Par conséquent, la dimension de son espace stable est égale à 1.

Une telle construction est détaillée dans [3]. En restriction à la fibre $\{q\} \times \mathbb{T}^2$, invariante, la dynamique peut être définie comme une application « Dérivée d’Anosov » (voir [6]).

Nous remarquons aussi que F préserve le feuilletage \mathcal{F}^s et que la section $\mathbb{T}^2 \times \{p\}$ et la fibre $\{p\} \times \mathbb{T}^2$ sont invariantes. Le point $P = (p, p)$ est fixe. La dimension de son espace stable est égale à 2.

Soit alors K l’ensemble maximal invariant dans $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \setminus V \times V$ avec $V = B(q, \frac{1}{2})$:

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \setminus V \times V).$$

Nous montrons :

PROPOSITION 2.1. – *L’ensemble K est hyperbolique et n’est contenu dans aucun ensemble hyperbolique localement maximal.*

3. Démonstration de la proposition

La propriété (a) de la construction montre que sur un voisinage de K les actions de F et de F_0 coïncident. L'ensemble K est donc hyperbolique et il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall Z \in K, \quad W_{\varepsilon_0}^u(Z, F) = W_{\varepsilon_0}^u(Z, F_0).$$

Il existe donc $\theta_0 > 0$ tel que

$$\forall Z \in K, \quad \{\Phi_t^s(Z), |t| < \theta_0\} \subset W_{\varepsilon_0}^s(Z, F), \tag{1}$$

$$\{\Phi_{t'}^u(Z), |t'| < \theta_0\} \subset W_{\varepsilon_0}^u(Z, F). \tag{2}$$

Clairement les sous-ensembles invariants $\mathbb{T}^2 \times \{p\}$ et $\{p\} \times \mathbb{T}^2$ sont contenus dans K .

Nous montrons la proposition par l'absurde en supposant qu'il existe un ensemble hyperbolique Λ qui contient K et possède une structure de produit local : quitte à diminuer ε_0 et θ_0 , il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\forall (Z, Z') \in \Lambda^2, \quad d(Z, Z') < \delta_0 \Rightarrow W_{\varepsilon_0}^s(Z, F) \cap W_{\varepsilon_0}^u(Z', F) \subset \Lambda. \tag{3}$$

En diminuant à nouveau θ_0 nous pouvons supposer également :

$$\forall t, t' \in]-\theta_0, \theta_0[, \quad \forall Z \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2, \quad d(\Phi_t^s(Z), \Phi_{t'}^u(Z)) < \delta_0. \tag{4}$$

Fixons à présent une valeur $t' \in]-\theta_0, \theta_0[$ et appelons I le plus grand intervalle de \mathbb{R} qui contienne 0 et vérifie : pour tout $t \in I$, le point $Z = \Phi_t^s \circ \Phi_{t'}^u(P)$ est dans Λ et de plus, le feuilletage \mathcal{F}^s est tangent à la variété stable locale $W_\varepsilon^s(Z)$ en Z .

Puisque Λ est fermé et puisque le fibré stable au-dessus de K est continu, l'intervalle I est fermé. Nous allons montrer qu'il est également ouvert et ceci entraînera $I = \mathbb{R}$.

Soit $t_0 \in I$ (supposons par exemple $t_0 \geq 0$). Puisque $\gamma = \{\Phi_t^s \circ \Phi_{t_0}^u(P), 0 \leq t \leq t_0\}$ est une courbe stable de Λ contenue dans Λ , elle est uniformément contractée par itérations positives. D'autre part, le feuilletage \mathcal{F}^s est préservé. Il existe donc un entier $n \geq 0$ tel que

$$F^n(\gamma) \subset \left\{ \Phi_t^s(F^n(\Phi_{t_0}^u(P))), |t| < \frac{\varepsilon_0}{2} \right\}.$$

Prenant l'image par F^{-n} de $\{\Phi_t^s(F^n(\Phi_{t_0}^u(P))), |t| < \varepsilon_0\}$ et appliquant (1) au point $F^n(\Phi_{t_0}^u(P))$, on obtient ainsi l'existence de $0 < \varepsilon < \theta_0$ telle que

$$\{\Phi_t^s \circ \Phi_{t_0}^u(P), |t - t_0| < \varepsilon\} \subset W_{\varepsilon_0}^s(\Phi_{t_0}^s \circ \Phi_{t_0}^u(P)). \tag{5}$$

Soit t tel que $|t - t_0| < \varepsilon$. Le point $\Phi_t^s(P) = \Phi_{t-t_0}^s \circ \Phi_{t_0}^s(P)$ appartient à $\{p\} \times \mathbb{T}^2 \subset K$ et le point $\Phi_{t_0}^s \circ \Phi_{t_0}^u(P) = \Phi_{t_0}^u \circ \Phi_{t_0}^s(P)$ appartient à Λ par hypothèse. D'après la propriété (4), ils sont distants d'au plus δ_0 .

Les propriétés (2), (5) et le produit local (3) montrent alors que $\Phi_t^s \circ \Phi_{t_0}^u(P) \in \Lambda$. On en déduit finalement $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\subset I$. L'intervalle I est donc ouvert.

Par conséquent $I = \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall t' \in]-\theta_0, \theta_0[, \quad \{\Phi_t^s \circ \Phi_{t'}^u(P), t \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Les feuilles de \mathcal{F}^s sont denses dans leur fibre. Ceci implique donc

$$\forall t' \in]-\theta_0, \theta_0[, \quad \{\phi_{t'}^u(p)\} \times \mathbb{T}^2 \subset \Lambda.$$

Itérant par F nous obtenons alors

$$\bigcup_{t' \in \mathbb{R}} \{\phi_{t'}^u(p)\} \times \mathbb{T}^2 \subset \Lambda.$$

En prenant l'adhérence, il vient $\Lambda = \mathbb{T}^2$ ce qui contredit le fait que les points fixes P et Q aient des espaces stables de dimension différente.

Remerciements. Je remercie mon directeur de thèse J.-C. Yoccoz pour ses encouragements.

Références bibliographiques

- [1] C. Bonatti, L. Díaz, Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms, *Ann. of Math.* 143 (1995) 357–396.
- [2] B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math., Vol. 583, Springer-Verlag, 1977.
- [4] M. Shub, *Topologically Transitive Diffeomorphisms on \mathbb{T}^4* , Lecture Notes in Math., Vol. 206, Springer-Verlag, 1971.
- [5] M. Shub, *Stabilité Globale des Systèmes Dynamiques*, Astérisque, Vol. 56, Société Mathématique de France, 1978.
- [6] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 747–817.