

Théorèmes ergodiques aléatoires et suites de poids aléatoires régularisants

Sylvain Durand, Dominique Schneider

LAMFA, CNRS FRE 2270, Université de Picardie Jules Verne, 33, rue St. Leu, 80039 Amiens cedex, France

Reçu le 12 décembre 2001 ; accepté le 27 décembre 2001

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé

Dans ce travail nous étudions des propriétés de convergence ponctuelle de moyennes ergodiques lelong de sous-suites aléatoires et ceci dans un sens universel. De plus, nous obtenons également des résultats de convergence pour des moyennes ergodiques pondérées par des variables aléatoires. Ces résultats sont obtenus comme applications de l'étude de la régularité de certains polynômes trigonométriques aléatoires. Les méthodes de preuves reposent essentiellement sur des outils Gaussiens, l'étude de polynômes trigonométriques aléatoires ainsi que la théorie spectrale. *Pour citer cet article : S. Durand, D. Schneider, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 375–378.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Random ergodic theorems and regularizing random weights

Abstract

In this work, we study the convergence of pointwise ergodic averages for random subsequences, in a universal framework. We give also results on the convergence of averages which are modulated by random weights. These results are obtained as a consequence of the study of the regularity of random trigonometric polynomials. The methods used in this work involve mainly Gaussian tools, random trigonometric polynomials and spectral theory. *To cite this article: S. Durand, D. Schneider, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 375–378.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction–résultats principaux

Considérons (Ω, \mathcal{B}, P) un espace probabilisé complet sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles $(X_k, k \geq 1)$, indépendantes et non-nécessairement identiquement distribuées. Par souci de simplicité, nous ne considérerons que le cas de la dimension un. Nous généralisons cette étude dans [2] au cas des vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d ($d \geq 1$). Notre but est de donner des estimations précises de l'ordre de grandeur asymptotique de polynômes trigonométriques $\sum_{k=1}^N [\exp(2i\pi\alpha X_k(\omega)) - \mathbb{E} \exp(2i\pi\alpha X_k)]$, uniformément en la variable $\alpha \in [0, 1]$. Nous obtiendrons ainsi des applications de ces résultats en théorie ergodique, plus précisément des propriétés de convergence ponctuelle de moyennes d'opérateurs associées à un système dynamique.

THÉORÈME 1. – *Supposons qu'il existe une suite croissante de réels positifs $(q_N, N \geq 1)$ vérifiant les conditions suivantes : (1) la suite $(\sqrt{N}/q_N, N \geq 1)$ est décroissante, (2) $1/q_N = O(1/\sqrt{N \log N})$,*

Adresse e-mail : dominique.schneider@u-picardie.fr (D. Schneider).

(3) $\mathbb{E} \sup_{N \geq 1} \sqrt{(N \log^+(|X_N|))/q_N^2} < \infty$. Alors nous avons l'estimation, (4) $\mathbb{E} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \frac{1}{q_N} \sum_{k=1}^N \exp(2i\pi\alpha X_k(\omega)) - \mathbb{E} \exp(2i\pi\alpha X_k) \right| < \infty$.

Exemples. –

- Les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiées dans le cas où $X_N = u_N + \theta_N$ avec $(u_k, k \geq 1)$ une suite d'entiers positifs strictement croissante et $(\theta_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle qu'il existe $\delta > 0$ avec $\mathbb{E}|\theta_1|^\delta < \infty$. Dans cette situation on peut choisir $q_N = \sqrt{N \log(1 + u_N)}$ (cf. [5]).
- Plus généralement, nous montrons (voir [2] début de la preuve du Théorème 7) qu'étant donné $\delta \in]0, 1[$, s'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{E}(|X_N|^\delta) = O(2^{N^\gamma})$, alors les hypothèses du Théorème 1 sont vérifiées avec $q_N = N^{\gamma'}$ où $\gamma' \in]\frac{\gamma+1}{2}, 1[$.

Nous donnons également une estimation de l'ordre de grandeur asymptotique de polynômes trigonométriques pondérés par des poids aléatoires.

THÉORÈME 2. – Soit (Ω, \mathcal{B}, P) un espace probabilisé complet sur lequel est définie une suite $(X_k, k \geq 1)$ de variables aléatoires réelles, centrées, indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$. Soit $(n_k, k \geq 1)$ une suite d'entiers positifs strictement croissante. Alors nous avons : $\mathbb{E} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \frac{1}{\sqrt{N \log(1+n_N)}} \sum_{k=1}^N X_k \exp(2i\pi\alpha n_k) \right| < \infty$.

Le lecteur intéressé trouvera une démonstration du Théorème 2 dans [7]. De plus, ce résultat sera efficace lorsque la suite $(n_k, k \geq 1)$ aura au plus une croissance de l'ordre de 2^{k^β} avec $\beta \in]0, 1[$.

Avant de présenter deux applications en théorie ergodique aléatoire, commençons par rappeler deux définitions.

DÉFINITION 3. – Une suite d'entiers $(u_k, k \geq 1)$ est une bonne suite universelle presque-partout (B.S.U.P.P.) si pour tout système dynamique mesuré (X, \mathcal{A}, μ, T) (T opère sur X et préserve la mesure de probabilité μ), pour tout $f \in L^2(\mu)$, nous avons $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f \circ T^{u_k}$ existe μ -presque-partout.

Nous convenons d'étendre la Définition 3 aux contractions positives, ce qui signifie que la propriété de convergence ponctuelle est vérifiée pour toutes contractions positives de l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$.

DÉFINITION 4. – Une suite de variables aléatoires $(X_k, k \geq 1)$, à valeurs entières, définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{B}, P) , est universellement 2-représentative presque-partout s'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, nous avons : pour tout système dynamique mesuré (X, \mathcal{A}, μ, T) , pour tout $f \in L^2(\mu)$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f \circ T^{X_k(\omega)}$ existe μ -presque-partout.

Remarque. – Il est essentiel de noter que l'ensemble \mathcal{B} -mesurable Ω_0 presque-sûr est indépendant du choix du système dynamique mesuré (X, \mathcal{A}, μ, T) . La principale difficulté dans ce type de problème se situe à ce niveau.

Première application : un théorème ergodique aléatoire.

THÉORÈME 5. – Soit (Ω, \mathcal{B}, P) un espace probabilisé complet sur lequel est définie une suite de variables aléatoires $(X_k, k \geq 1)$ à valeurs entières et indépendantes. De plus, supposons que la loi de X_k soit engendrée par convolution d'une loi donnée, c'est-à-dire qu'il existe une variable aléatoire intégrable Y telle que $\forall k \geq 1, dP_{X_k} = dP_Y^{*(u_k)}$, où (u_k) est une suite supposée B.S.U.P.P. étendue à toutes contractions positives et telle qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ avec $u_k = O(2^{k^\beta})$.

Alors la suite $(X_k, k \geq 1)$ est universellement 2-représentative presque-partout. Le résultat est encore vrai pour toutes contractions positives.

Exemples. – (a) Considérons un processus aléatoire indépendant $(X_k, k \geq 1)$ tel que pour tout entier $k \geq 1$, la loi de X_k est une loi de Poisson de paramètre $k + [k^{1/3} \log k]$. Le processus ainsi définie est

universellement 2-représentative presque-partout. En effet la suite $(k + [k^{1/3} \log k])_{k \geq 1}$ est B.S.U.P.P. étendue à toutes contractions positives (voir [6]).

Voici un autre exemple qui n'est pas une application directe du Théorème 5, mais une conséquence technique de sa preuve.

(b) Considérons une suite strictement croissante d'entiers $(t_n, n \geq 1)$ éventuellement lacunaire. Pour tout entier n notons X_n la variable aléatoire uniformément répartie sur son support $S_n = \{0, 1, 2, \dots, t_n\}$. Ainsi $P(X_n = k) = \frac{1}{1+t_n}$ pour tout entier $k \in S_n$ et 0 sinon. Sur l'espace produit, nous construisons un processus indépendant $(X_k, k \geq 1)$ où chaque X_n possède la loi indiquée ci-dessus. Alors, la suite aléatoire ainsi définie est universellement 2-représentative presque-partout. De plus la limite est parfaitement identifiée. En effet, la question de la convergence est réduite à l'étude de la moyenne ergodique $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} f \circ T^{X_k}$ avec $\mathbb{E} f \circ T^{X_k} = \frac{1}{1+t_k} \sum_{j=0}^{t_k} f \circ T^j$. En vertu du théorème de Birkhoff, la «moyenne de moyenne» converge presque-partout vers $\mathbb{E}(f/\mathcal{J})$ où \mathcal{J} est la tribu engendrée par les points fixes de T . C'est encore vrai pour les contractions positives. De plus la convergence a aussi lieu en moyenne quadratique en vertu de théorème de von Neumann. Cet exemple généralise certains théorèmes ergodiques aléatoires de Bourgain (voir [1]).

Deuxième application : l'effet régularisant d'une suite de poids aléatoires

THÉORÈME 6. – Soit (Ω, \mathcal{B}, P) un espace probabilisé sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles, centrées, indépendantes et identiquement distribuées $(X_k, k \geq 1)$ vérifiant $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$. Soit $(u_k, k \geq 1)$ une suite d'entiers strictement croissante telle qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ avec $u_k = O(2^{k^\beta})$. Alors il existe un ensemble Ω_0, \mathcal{B} -mesurable, avec $P(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, pour tout système dynamique mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu, T), \forall f \in L^2(\mu), \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\omega) f \circ T^{u_k} = 0, \mu$ -presque-partout.

Remarque. – Il n'est pas nécessaire de supposer que la suite $(u_k, k \geq 1)$ soit B.S.U.P.P. La suite de poids aléatoires centrées régularise la convergence ponctuelle de la moyenne ergodique

2. Éléments de démonstration du Théorème 1

Nous proposons maintenant de donner une articulation principale de la preuve du Théorème 1. L'argumentation essentielle repose sur une randomisation de problème permettant l'utilisation d'outils Gaussiens. Par souci de simplicité nous ne présentons ici que l'étape conduisant au problème Gaussien (voir à ce sujet [3] et [8]), sur l'emploi des outils Gaussiens voir [8] et [5].

Étape randomisation : cette étape consiste à transférer le problème à une question relative à la régularité de trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes.

Considérons une copie indépendante de $X = (X_k, k \geq 1)$ notée $X' = (X'_k, k \geq 1)$. En vertu de propriétés usuelles de convexité, afin de prouver (4), il suffit de montrer

$$\mathbb{E}_{X, X'} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left| \frac{1}{q_N} \sum_{k=1}^N \exp(2i\pi\alpha X_k) - \exp(2i\pi\alpha X'_k) \right| < \infty. \tag{5}$$

Symétrisation du problème : considérons la famille suivante de fonctions aléatoires séparables, à trajectoires continues, $f = \{f_k(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha X_k) - \exp(2i\pi\alpha X'_k), \alpha \in [0, 1], k \geq 1\}$. Par construction f constitue une famille symétrique de fonctions aléatoires, c'est-à-dire que leur loi est invariante par changement de signes. Plus précisément, notons $(\varepsilon_k, k \geq 1)$ une suite variables aléatoires indépendantes de Rademacher (prenant les valeurs +1 and -1 avec probabilité 1/2) indépendantes des suites aléatoires X et X' .

Ainsi, nous savons que $(f_k, k \geq 1)$ et $(\varepsilon_k f_k, k \geq 1)$ ont même loi. Ainsi (5) s'écrit sur un espace d'intégration plus large,

$$\mathbb{E}_{X, X', \varepsilon} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left| \frac{1}{q_N} \sum_{k \leq N} \varepsilon_k f_k(\alpha) \right| \leq 2 \mathbb{E}_{X, \varepsilon} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left| \frac{1}{q_N} \sum_{k \geq 1, k \leq N} \varepsilon_k \exp(2i\pi\alpha X_k) \right|. \tag{6}$$

Nous utilisons alors un outil bien connu dans l'étude des processus Gaussiens : le principe de contraction. Cet outil repose sur une idée simple nous permettant de remplacer le changement de signes par une suite

de variables aléatoires gaussiennes centrées, réduites et indépendantes (isonormales). Pour plus de détails, voir [5], p. 169.

Afin de montrer que le terme de droite dans (6) est fini, il suffit de vérifier

$\mathbb{E}_{X, g, g'} \sup_{N \geq 1} \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left| \frac{1}{qN} \sum_{k \leq N} g_k \cos(2\pi \alpha X_k) + g'_k \sin(2\pi \alpha X_k) \right| < \infty$, où $(g_k, k \geq 1)$ et $(g'_k, k \geq 1)$ sont deux suites de variables aléatoires ayant pour loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (isonormales) et indépendantes de X, ε and ε' . Conditionnellement à X , le problème se réduit donc à l'étude de la régularité de trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes. Ceci termine cette étape dans la preuve.

3. Applications en théorie ergodique aléatoire. Esquisses des preuves des résultats ergodiques

Schéma de preuve du Théorème 5.

Notre approche est basée sur l'étude du système dynamique, et ceci par l'intermédiaire du lemme spectral. Parfois selon la forme du processus $(X_k, k \in \mathbb{N})$ il peut être plus judicieux de procéder par transfert du problème au shift sur le modèle de l'orbite. Nous ne présentons pas cette méthode ici. Toutefois, le lecteur intéressé pourra consulter [2], Section 3 : an application of the transference method. Entant donnée un système dynamique, il suffit de montrer que la quantité $\Delta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f \circ T^{X_k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} f \circ T^{X_k}$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini. En effet, par hypothèse la suite de terme général $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} f \circ T^{X_k}$ converge μ -presque-partout. Ainsi, considérons la famille d'index géométriques suivante : $\rho > 1, \mathcal{N}_\rho = \{[\rho^k], k \geq 1\}$. Par des arguments standards de positivité, essentiellement (cf. [5]), il suffit alors de montrer : $\forall \rho > 1, \sum_{N \in \mathcal{N}_\rho} \|\Delta_N\|_{2, \mu} < \infty$. En vertu du lemme spectral (cf. [4]), nous relierons cette question aux polynômes trigonométriques :

$$\|\Delta_N\|_{2, \mu}^2 = \int_{[0, 1]} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp(2i\pi \alpha X_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \exp(2i\pi \alpha X_k) \right|^2 \mu_f(d\alpha),$$

où μ_f est la mesure spectrale de T en f .

En vertu du Théorème 1, nous déduisons l'existence d'une variable aléatoire positive intégrable C telle que $\|\Delta_N\|_{2, \mu} \leq C(\omega) \|f\|_{2, \mu}(q_N/N)$, avec $\sum_{N \in \mathcal{N}_\rho} (q_N/N) < \infty$. Ceci termine la preuve du Théorème 5.

Schéma de preuve du Théorème 6.

En utilisant le schéma précédent, il n'est pas difficile de conclure quant à la convergence ponctuelle vers zéro (universellement sur Ω) de la suite $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k f \circ T^{u_k}$, le long d'index partiels $\mathcal{N}_q = \{k^q, k \geq 1\}$ avec q un entier dépendant de la croissance de la suite $(u_k, k \geq 1)$. La question nouvelle étant la possibilité de « remonter » à l'index total, n'ayant plus l'argument de positivité à notre disposition. Pour ce faire, pour tout entier M , notons N l'entier tel que $N^q \leq M < (N+1)^q$, il suffit de montrer que la suite $\frac{1}{N^q} \sum_{k=N^q}^{(N+1)^q-1} |X_k| |f \circ T^{u_k}|$ converge vers zéro. En supposant alors f positive, puis en décomposant $f = f \mathbb{1}_{f \leq \sqrt{N}} + f \mathbb{1}_{f > \sqrt{N}}$, le fait que T soit invariante pour la mesure μ et enfin que pour tout entier $q \geq 3$ on ait $\mathbb{E} \sup_{N \geq 1} \frac{1}{N^{q-1}} \sum_{k=N^q}^{(N+1)^q-1} |X_k| < \infty$, permet de conclure quant au Théorème 6.

Références bibliographiques

- [1] J. Bourgain, Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets with an appendix on return time sequences, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 69 (1988).
- [2] S. Durand, D. Schneider, Random ergodic theorems and regularizing random weights, Ergodic Theory Dynamical Systems, 2002 (accepté).
- [3] X. Fernique, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, Probab. Theory Related Fields 88 (1991) 521–536.
- [4] U. Krengel, Ergodic Theorems, De Gruyter, 1985.
- [5] D. Schneider, Théorèmes ergodiques perturbés, Israel J. Math. 101 (1997) 157–178.
- [6] D. Schneider, Thèse d'habilitation à diriger les recherches, Prépublication L.A.M.F.A., 2002.
- [7] D. Schneider, M. Weber, Weighted Averages of Contractions Along Subsequences, in: De Gruyter, Berlin, 1996, pp. 399–404.
- [8] M. Weber, Entropie métrique et convergence presque-partout, Hermann, Vol. 58, 1999.