C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 441–444

Théorie des groupes/*Group Theory*

Cohomologie des fibrés en droites sur la compactification magnifique d'un groupe semi-simple adjoint

Alexis Tchoudjem

Université Grenoble 1, Institut Fourier, UFR de mathématiques, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France

Reçu le 22 janvier 2002 ; accepté le 24 janvier 2002

Note présentée par Jean-Pierre Demailly.

Résumé Soient G un groupe semi-simple adjoint, X sa compactification magnifique et $\widetilde{G}$ son revêtement universel. On détermine en tant que $\widetilde{G}\times\widetilde{G}$-modules les groupes de cohomologie $H^i(X,\mathcal{L})$ de tous les faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X. ***Pour citer cet article : A. Tchoudjem, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 441–444.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Cohomology of line bundles on the wonderful compactification of an adjoint semi-simple group

Abstract Let G be an adjoint semi-simple group, X its wonderful compactification and $\widetilde{G}$ its universal covering. One determines the cohomology groups $H^i(X,\mathcal{L})$ of any invertible sheaf $\mathcal{L}$ on X, as $\widetilde{G}\times\widetilde{G}$-modules. ***To cite this article: A. Tchoudjem, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 441–444.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soient G un groupe semi-simple adjoint et connexe sur $\mathbb{C}$, B et B^- deux sous-groupes de Borel opposés et T le tore maximal $B\cap B^-$. On appellera W le groupe de Weyl et Φ le système de racines de (G,T), ρ la demi-somme des racines positives (par rapport à B) et $\Delta=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ la base de Φ définie par B ; on notera $l(w)$ la longueur de chaque $w\in W$ et w_0 l'élément de W de plus grande longueur. Étant donné $\widetilde{G}$ le revêtement universel de G, $\widetilde{B}$, $\widetilde{B^-}$, $\widetilde{T}$ seront les images réciproques de B, B^-, T dans $\widetilde{G}$. On posera $\widetilde{\mathcal{X}}:=X^*(\widetilde{T})$ le réseau des poids entiers de G et $\widetilde{\mathcal{X}}^+$ l'ensemble des poids entiers dominants.

Pour chaque $\lambda\in\widetilde{\mathcal{X}}^+$, L_λ désignera le $\widetilde{G}$-module simple de plus haut poids λ.

1. La compactification canonique de G

De Concini et Procesi ont construit (*cf.* [6]) la compactification « magnifique » X de G :

– X est une variété projective lisse qui contient G et l'action par multiplication à gauche et à droite de $G\times G$ sur G se prolonge à X ;
– $X-G$ est un diviseur à croisements normaux dont Δ indexe les composantes irréductibles : $X-G=D_{\alpha_1}\cup\cdots\cup D_{\alpha_r}$;

Adresse e-mail : atchoudj@ujf-grenoble.fr (A. Tchoudjem).

S1631-073X(02)02288-4/FLA

– chaque adhérence de $G \times G$-orbite est l'intersection transverse des D_α qui la contiennent ;
– $\mathcal{O}_\Delta := D_{\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\alpha_r}$ est l'unique $G \times G$-orbite fermée de X ; elle est isomorphe à $G/B^- \times G/B^-$.
Par la suite, on notera $\mathcal{O}_I$ la $G \times G$-orbite de X d'adhérence $\bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha$ (pour tout $I \subseteq \Delta$).

2. Les faisceaux inversibles

On rappelle la paramétrisation des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles sur X par les poids de $\widetilde{G}$: si $\lambda \in \widetilde{\mathcal{X}}$, alors il existe un faisceau inversible, unique à isomorphisme près, et $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$-linéarisé sur X, $\mathcal{L}_\lambda$, dont la restriction à $\mathcal{O}_\Delta$ est le faisceau associé au caractère $(-w_0(\lambda), \lambda)$ de $\widetilde{B^-} \times \widetilde{B^-}$. On trouve ainsi toutes les classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X (*cf.* [6], § 8 et [4,11]).

3. Leurs groupes de cohomologie

Chaque $H^i(X, \mathcal{L}_\lambda)$ est un $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$-module rationnel (*cf.* [10], Théorème 11.6). Il se décompose donc en une somme directe de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$-modules simples avec multiplicités.

Le résultat principal de cette Note décrit ces multiplicités. L'énoncé fait intervenir les ensembles $I_t := \{\alpha \in \Delta \mid t(\alpha) > 0\}$, $J_t := \Delta - I_t$ et l'ensemble $\mathbb{N}I_t$ (respectivement $\mathbb{N}^* J_t$) des poids de la forme $\sum_{\alpha \in I_t} n_\alpha \cdot \alpha$ avec $n_\alpha \in \mathbb{N}$ pour tout α (respectivement $\sum_{\alpha \in J_t} n_\alpha \cdot \alpha$ avec $n_\alpha \in \mathbb{N}^*$ pour tout α).

THÉORÈME. – *Soit λ un poids entier. On a un isomorphisme de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$-modules* :

$$H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \widetilde{\mathcal{X}}^+} m_\lambda^i(\nu) \operatorname{End}(L_\nu)$$

où $m_\lambda^i(\nu)$ est le nombre des $t \in W$ tels que $2l(t) + |J_t| = i$ et $t^{-1} * \nu \in \lambda - \mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^* J_t$.

Remarques. – (1) On retrouve les faits connus suivants (*cf.* [6]) :
– si $i = 0$, $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \widetilde{\mathcal{X}}^+, \nu \leqslant \lambda} \operatorname{End}(L_\nu)$;
– si λ est dominant, $H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

(2) Les multiplicités sont majorées indépendamment de λ et elles peuvent être plus grandes que 2 : par exemple si $G = \mathrm{PSO}(8, \mathbb{C})$ et $i = 5$, alors pour tout $\nu \in \widetilde{\mathcal{X}}^+$, il existe un poids entier λ tel que $m_\lambda^5(\nu) = 3$.

Je vais donner les grandes étapes de la démonstration. On va utiliser :

4. Le complexe de Grothendieck–Cousin (cf. [10,9])

Soient $X \supseteq Z_0 \supseteq \cdots \supseteq Z_n \supseteq Z_{n+1} = \emptyset$ une filtration d'un espace topologique X par des fermés et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X. On appelle *q-ième complexe de Grothendieck–Cousin* le complexe

$$0 \to H^q_{Z_0/Z_1}(X, \mathcal{F}) \to \cdots \to H^{q+n}_{Z_n}(X, \mathcal{F}) \to 0.$$

THÉORÈME (*cf.* [10], Théorème 8.7 et [3], Lemme 1.2). – *Soit $c \in \mathbb{N}$. Si pour chaque $q \neq c$, les groupes de cohomologie locale $H^{q+i}_{Z_i/Z_{i+1}}(X, \mathcal{F})$ sont nuls alors, pour tout $n \geqslant 0$, $H^n_{Z_0}(X, \mathcal{F})$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe*

$$0 \to H^c_{Z_0/Z_1}(X, \mathcal{F}) \to \cdots \to H^{c+n}_{Z_n}(X, \mathcal{F}) \to 0. \quad \square$$

Remarque. – Ce théorème s'applique au cas où X est la variété de drapeaux G/B^- et $\mathcal{F} = \mathcal{L}_{G/B^-}(\lambda)$, le faisceau inversible associé au caractère λ de B^-, en prenant comme Z_i les réunions des B-orbites de codimension $\geqslant i$. Les $H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(G/B^-, \mathcal{L}_{G/B^-}(\lambda))$ sont alors des $\mathfrak{g} - B$-modules si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G (*cf.* [10], Lemme 12.4) et on obtient : $H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(G/B^-, \mathcal{L}_{G/B^-}(\lambda)) = \bigoplus_{w, l(w)=i} M^w(\lambda)$ avec $M^w(\lambda) := H^{l(w)}_{BwB^-/B^-}(G/B^-, \mathcal{L}_{G/B^-}(\lambda))$. Chaque $M^w(\lambda)$ est un « module de Verma tordu » : c'est un $\mathfrak{g} - B$-module qui a la même suite de Jordan–Hölder que le module de Verma de plus haut poids $w * \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho$ (*cf.* [10], Lemme 12.8 et [8], § 2.2). En particulier, pour tout $\nu \in \widetilde{\mathcal{X}}^+$, la multiplicité de $M^w(\lambda)$ selon L_ν est 1 si $w * \lambda = \nu$ et 0 sinon (*cf.* [7], Proposition 7.6.1). Par conséquent, s'il existe $w \in W$

tel que $l(w)=i$ et $w*\lambda=\nu$ alors $H^i(G/B^-,\mathcal{L}_{G/B^-}(\lambda))=L_\nu$ et sinon $H^i(G/B^-,\mathcal{L}_{G/B^-}(\lambda))=(0)$; c'est le théorème de Borel–Weil–Bott.

On va employer cette méthode avec la compactification X munie de la filtration par les Z_i, réunions des $B\times B$-orbites de codimension $\geqslant i$, pour déterminer les $H^i(X,\mathcal{L}_\lambda)$.

Pour cela, on aura besoin de la paramétrisation de ces orbites obtenue dans [5] et [12].

5. Les cellules et les $B\times B$-orbites

Les points fixes de X pour $T\times T$ sont dans $\mathcal{O}_\Delta$ (*cf.* [6], § 7.2). Ils sont donc paramétrés par $W\times W$: on les notera $x_{w,t}$ $(w,t\in W\times W)$. Soit $\check{\rho}$ le sous-groupe à un paramètre de T tel que pour tout $\alpha\in\Delta$, $\langle\alpha,\check{\rho}\rangle=1$. On définit $\zeta:=(\check{\rho},\check{\rho}^n)$, un sous-groupe à un paramètre de $T\times T$, pour un $n>0$ assez grand fixé (*cf.* [5], § 3.3). Les points fixes de ζ dans X sont les points fixes de $T\times T$ et les cellules de Bialynicki-Birula $C_{w,t}:=\{x\in X\mid \zeta(s)\cdot x\underset{s\to 0}{\to}x_{w,t}\}$ sont des sous-variétés localement fermées de X, $B\times B$-invariantes et isomorphes à des espaces affines (*cf.* [2,5]) ; soit $c_{w,t}$ leur codimension. L'indexation des $x_{w,t}$ sera choisie pour que $C_{1,1}$ soit la cellule ouverte et que si $w,t\in W$, $C_{w,t}$ soit fermée dans $X_{w,t}:=(w,t)C_{1,1}$. De plus, (*cf.* [5]) lorsque $C_{w,t}$ rencontre une $G\times G$-orbite $\mathcal{O}_I$ (*c-à-d* quand $J_t\subseteq I\subseteq\Delta$), $C_{w,t}\cap\mathcal{O}_I$ est une $B\times B$-orbite de X que l'on appellera (w,t,I) ; soit $c_{w,t,I}$ sa codimension. On paramètre ainsi toutes les $B\times B$-orbites de X par les triplets (w,t,I) tels que $w,t\in W$ et $J_t\subseteq I\subseteq\Delta$.

On montre que : $c_{w,t}=l(w)+l(t)+|J_t|$ *et* $c_{w,t,I}=l(w)+l(t)+|I|$.

6. Filtrations

Dorénavant, on abrégera $H^i_Z(X,\mathcal{L}_\lambda)$ en $H^i_Z(\lambda)$ (pour tout $\lambda\in\widetilde{\mathcal{X}}$ et tout $Z\subseteq X$ localement fermé). On va analyser les $H^q_{Z_i/Z_{i+1}}(\lambda)$: ce sont des $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B}$-modules (*cf.* [10], Corolaire 11.2 et Théorème 11.6). On appellera $Z(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, et $\chi_\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(Z(\mathfrak{g}),\mathbb{C})$ le caractère central du $\mathfrak{g}$-module simple L_λ. Si M est un $U(\mathfrak{g})$-module de longueur finie et L un $\mathfrak{g}$-module simple, on notera $[M:L]$ la multiplicité de M selon L.

Si $\chi\in Z(\mathfrak{g})\times Z(\mathfrak{g})$ est un caractère central, le foncteur $M\mapsto M_\chi$ (défini dans [1] et dans [7], § 7.8.15) est exact sur la catégorie des $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B}$-modules. En particulier, si $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\widetilde{\mathcal{X}}^+\times\widetilde{\mathcal{X}}^+$ est un poids entier dominant, alors $(H^i(X,\mathcal{L}_\lambda))_{\chi_\mu}=[H^i(X,\mathcal{L}_\lambda):L_\mu]L_\mu$ est le i-ème groupe d'homologie du complexe :

$$\cdots\to\bigoplus_{(w,t,I),\ c_{w,t,I}=i}\left(H^i_{(w,t,I)}(\lambda)\right)_{\chi_\mu}\overset{d^i_\mu}{\to}\bigoplus_{(w,t,I),\ c_{w,t,I}=i+1}\left(H^{i+1}_{(w,t,I)}(\lambda)\right)_{\chi_\mu}\to\cdots$$

Ce complexe est constitué par des $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B}$-modules de longueur finie dont on peut déterminer la multiplicité selon L_μ grâce au lemme suivant.

On dit qu'un $\mathfrak{g}-B$-module, M, admet un w-*drapeau de type* Λ (où Λ est une partie finie de $\widetilde{\mathcal{X}}$) s'il existe une filtration $M=M_0\supseteq\cdots\supseteq M_n\supseteq M_{n+1}=(0)$ où la suite $(M_i/M_{i+1})_{0\leqslant i\leqslant n}$ est à permutation près $(M^w(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$.

LEMME. – 1° $H^i_{C_{w,t}}(\lambda)=(0)$ *si* $i\neq c_{w,t}$ *et* $H^i_{(w,t,I)}(\lambda)=(0)$ *si* $i\neq c_{(w,t,I)}$;

2° *Le* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B}$-*module* $(H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\lambda))_{\chi_\mu}$ *admet un* (w,t)-*drapeau de type*

$$(\lambda-\mathbb{N}I_t+\mathbb{N}^*J_t)\cap W*\left(-w_0(\mu_1)\right)\cap W*\mu_2;$$

3° *Le* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}-\widetilde{B}\times\widetilde{B}$-*module* $(H^{c_{w,t,I}}_{(w,t,I)}(\lambda))_{\chi_\mu}$ *admet un* (w,t)-*drapeau de type* $(\lambda+\mathbb{Z}(\Delta-I)+\mathbb{N}^*I)\cap W*(-w_0(\mu_1))\cap W*\mu_2$.

D'après [8], § 2.2, [7], Proposition 7.6.1 et [10], Lemme 12.8, on connaît la multiplicité selon L_μ des $M^{w,t}(\lambda)$; on en déduit :

COROLLAIRE. – *Soit* $\nu\in\widetilde{\mathcal{X}}^+$. *On note* $w_0(t):=w_0tw_0$.

1. *Si* $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+ \times \widetilde{\mathfrak{X}}^+$ *n'est pas de la forme* $(-w_0(\nu'), \nu')$ $(\nu' \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+)$*, alors* $[H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\lambda) : L_\mu] = [H^{c_{w,t,I}}_{(w,t,I)}(\lambda) : L_\mu] = 0$;
2. $[H^{c_{w,t}}_{C_{w,t}}(\lambda) : \mathrm{End}(L_\nu)] = \begin{cases} 1 & \textit{si } w = w_0(t) \textit{ et } \text{ si } t^{-1} * \nu \in \lambda - \mathbb{N}I_t + \mathbb{N}^* J_t, \\ 0 & \textit{sinon}; \end{cases}$
3. $[H^{c_{w,t,I}}_{(w,t,I)}(\lambda) : \mathrm{End}(L_\nu)] = \begin{cases} 1 & \textit{si } w = w_0(t) \textit{ et } \text{ si } t^{-1} * \nu \in \lambda + \mathbb{Z}(\Delta - I) + \mathbb{N}^* I, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

7. Fin de la démonstration

On déduit immédiatement du corollaire que : $(H^i(X, \mathcal{L}_\lambda))_{\chi_\mu} = (0)$ si $\mu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+ \times \widetilde{\mathfrak{X}}^+$ n'est pas de la forme $(-w_0(\nu), \nu)$ pour un $\nu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$. Maintenant, on fixe $\nu \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+$ et $\mu := (-w_0(\nu), \nu) \in \widetilde{\mathfrak{X}}^+ \times \widetilde{\mathfrak{X}}^+$, alors $L_\mu = \mathrm{End}(L_\nu)$. On va calculer $[H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) : L_\mu] = [\ker d^i_\mu : L_\mu] - [\mathrm{im}\, d^{i-1}_\mu : L_\mu]$.

Dans la décomposition $H^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\lambda) = \bigoplus H^i_{(w,t,I)}(\lambda)$ (somme sur les orbites (w, t, I) de codimension i), on sépare les composantes $H^i_{(w_0(t),t,I)}(\lambda)$ des autres dont la multiplicité selon L_μ est certainement nulle d'après le corollaire.

Pour cela, soit $\Omega_{i,t}$ la réunion (disjointe) des orbites $(w_0(t), t, I)$ qui sont de codimension i. Comme ce sont à la fois des ouverts et des fermés de $Z_i - Z_{i+1}$, on obtient des morphismes de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} - \widetilde{B} \times \widetilde{B}$-modules

$$\delta^{i,t}_\mu : \left(H^i_{\Omega_{i,t}}(\lambda)\right)_{\chi_\mu} \to \left(H^{i+1}_{\Omega_{i+1,t}}(\lambda)\right)_{\chi_\mu} \quad (\forall\, i \geqslant 0,\ \forall\, t \in W)$$

qui vérifient

$$\sum_{t \in W} \left[\ker \delta^{i,t}_\mu : L_\mu\right] - \left[\mathrm{im}\, \delta^{i-1,t}_\mu : L_\mu\right] = \left[\ker d^i_\mu : L_\mu\right] - \left[\mathrm{im}\, d^{i-1}_\mu : L_\mu\right].$$

Mais pour tout $t \in W$, $[\ker \delta^{i,t}_\mu : L_\mu] - [\mathrm{im}\, \delta^{i-1,t}_\mu : L_\mu] = [H^i_{C_{w_0(t),t}}(\lambda) : L_\mu]$ car le complexe

$$0 \to H^{c_{w_0(t),t,J_t}}_{\Omega_{c_{w_0(t),t,J_t},t}}(\lambda) \to \cdots \to H^i_{\Omega_{i,t}}(\lambda) \to \cdots \to H^{c_{w_0(t),t,\Delta}}_{\Omega_{c_{w_0(t),t,\Delta},t}}(\lambda) \to 0$$

est le complexe de Grothendieck–Cousin associé à $\mathcal{L}_\lambda$ et à la filtration de $X_{w_0(t),t}$ par les adhérences (dans $X_{w_0(t),t}$) des $\Omega_{i,t}$. Finalement, on conclut à l'aide du corollaire et du lemme que

$$\left[H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) : L_\mu\right] = \sum_{t \in W} \left[H^i_{C_{w_0(t),t}}(\lambda) : L_\mu\right] = \sum_{t \in W,\ c_{w_0(t),t} = i} \left[H^{c_{w_0(t),t}}_{C_{w_0(t),t}}(\lambda) : L_\mu\right] = m^i_\lambda(\nu).$$

Remerciements. Je remercie mon directeur de thèse Michel Brion.

Références bibliographiques

[1] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand, Differential operators on the base affine space and a study of g-modules, in: Lie Group Representations, Proc. Summer School Bolyai Janos Math. Soc. (Budapest, 1971), 1975, pp. 21–64.
[2] A. Bialynicki-Birula, Some theorems on actions of algebraic groups, Ann. Math. 98 (1973) 480–497.
[3] M. Bozicevic, A geometric construction of a resolution of the fundamental series, Duke Math. J. 60 (3) (1990) 643–669.
[4] M. Brion, P. Polo, Large Schubert varieties, Represent. Theory 4 (6) (2000) 97–126.
[5] M. Brion, The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition, Comm. Math. Helvet. 73 (1998) 137–174.
[6] C. De Concini, C. Procesi, Complete symmetric varieties, in: Invariant Theory, Lecture Notes Math., Vol. 966, 1983, pp. 1–44.
[7] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Gauthiers-Villars, 1974.
[8] B. Feigin, E. Frenkel, Affine Kac–Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, Comm. Math. Phys. 128 (1990) 161–189.
[9] R. Hartshorne, Residues and Duality, Springer-Verlag, 1966.
[10] G. Kempf, The Grothendieck–Cousin complex of an induced representation, Adv. Math. 29 (1978) 310–396.
[11] H. Kraft, P. Slodowy, T.A. Springer (Eds.), Algebraic Transformation Groups and Invariant Theory, DMV Sem., Vol. 13, Birkhäuser, 1989.
[12] T.A. Springer, Intersection cohomology of $B \times B$-orbits in group compactifications, Prépublication disponible à http://www.math.uu.nl/people/vdkallen/kallen.html.