

Nulle contrôlabilité régionale d'une équation de type Crocco linéarisée

Patrick Martinez, Jean-Pierre Raymond, Judith Vancostenoble

MIP, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

Reçu le 14 janvier 2002 ; accepté le 5 février 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé

On s'intéresse à des problèmes de contrôle pour des équations issues d'un modèle de couche limite. Le problème est décrit par une équation parabolique dégénérée (équation de type Crocco linéarisée) où sont couplés des phénomènes de diffusion et de transport.

On donne tout d'abord une caractérisation géométrique du domaine d'influence d'un contrôle localement distribué. On montre alors la nulle contrôlabilité régionale dans ce domaine. La preuve est basée sur une inégalité d'observabilité adéquate pour le problème homogène adjoint. Cette inégalité est obtenue par décomposition du domaine espace-temps et des estimations du type Carleman le long des caractéristiques. *Pour citer cet article : P. Martinez et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 581–584.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Regional null controllability of a linearized Crocco type equation

Abstract

We are interested in controllability problems of equations coming from a boundary layer model. This problem is described by a degenerate parabolic equation (a linearized Crocco type equation) where phenomena of diffusion and transport are coupled.

First we give a geometric characterization of the influence domain of a locally distributed control. Then we prove regional null controllability results on this domain. The proof is based on an adequate observability inequality for the homogeneous adjoint problem. This inequality is obtained by decomposition of the space-time domain and Carleman type estimates along characteristics. *To cite this article: P. Martinez et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 581–584.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Le champ de vitesse d'un écoulement laminaire sur une plaque plane peut être décrit par les équations de Prandtl [9]. Pour un écoulement 2D, ces équations sont écrites sur un domaine non borné $(0, L) \times (0, \infty)$, où $(0, L)$ représente la partie de la plaque où l'écoulement est laminaire, et $(0, \infty)$ représente « l'épaisseur » de la couche limite. Les conditions de raccord avec l'écoulement externe sont écrites en $+\infty$. En utilisant la transformation dite « de Crocco », ces équations se transforment en une équation non linéaire parabolique dégénérée (l'équation de Crocco, voir [9]) formulée dans un domaine borné $\Omega = (0, L) \times (0, 1)$. L'équation

Adresses e-mail : martinez@mip.ups-tlse.fr (P. Martinez); raymond@mip.ups-tlse.fr (J.-P. Raymond); vancoste@mip.ups-tlse.fr (J. Vancostenoble).

de Crocco linéarisée au voisinage d’une solution stationnaire est une équation de la forme

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{yy} + cu = f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u_y(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(0, y, t) = u_1(y, t), & (y, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où f et u_1 dépendent de la vitesse de l’écoulement amont, et où les coefficients a , b et c sont réguliers, mais dégénérés, et ont le comportement suivant [4,3] :

$$0 < a_1 \leq \frac{a(y)}{y} \leq a_2, \quad 0 < b_1 \leq \frac{b(x, y)}{-(y-1)^2 \ln(\mu(1-y))} \leq b_2, \quad c(x, y) \geq 0,$$

avec $0 < \mu < 1$. Compte tenu du caractère dégénéré du coefficient b , la condition de Dirichlet en $y = 1$ doit être correctement interprétée [3].

Dans cette Note on s’intéresse à un problème de nulle contrôlabilité pour une équation de type (1.1), mais à coefficients constants. (La condition limite en $y = 0$ de (1.1) est remplacée ci-dessous par une condition de Dirichlet pour simplifier les notations d’espaces fonctionnels.)

Soit $\omega = (x_0, x_1) \times \omega_y$ où $0 < x_0 < x_1 < L$ et ω_y est un ouvert de $(0, 1)$, et soit χ_ω la fonction caractéristique de ω .

Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ et $f \in L^2(\omega \times (0, T))$, on considère le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} u_t + u_x - u_{yy} = \chi_\omega f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(0, y, t) = u_1(y, t), & (y, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Tout d’abord, on peut montrer que le problème est bien posé : pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ et $f \in L^2(\omega \times (0, T))$, le problème (1.2) admet une unique solution qui vérifie $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, L]; L^2((0, T) \times (0, 1))) \cap L^2((0, T) \times (0, L); H^1_0(0, 1))$.

Ensuite, on étudie le problème de nulle contrôlabilité suivant : pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2((0, 1) \times (0, T))$, existe-t-il $f \in L^2(\omega \times (0, T))$ telle que la solution u de (1.2) vérifie $u(x, y, T) = 0$ pour $(x, y) \in \Omega_C$, où Ω_C désigne une partie de Ω ?

Dans un premier temps, pour déterminer la région Ω_C de Ω sur laquelle on peut espérer contrôler $u(\cdot, T)$, on détermine le domaine d’influence du contrôle f .

2. Domaine d’influence du contrôle

Soient $0 < T < L - x_1$ et $\Omega_C := (x_0, x_1 + T) \times (0, 1)$. Par décomposition spectrale de la solution de (1.2), on peut montrer (voir [10]) que le domaine d’influence de $\chi_\omega f$ au temps T est le domaine Ω_C représenté sur la Fig. 1. En effet, du fait de la diffusion dans la direction y , la zone d’influence en y d’un contrôle supporté en y dans ω_y est $(0, 1)$. Par contre, du fait du transport à vitesse égale à 1 dans la direction x , la zone d’influence en x d’un contrôle supporté en x dans (x_0, x_1) est restreinte à $(x_0, x_1 + T)$.

Finalement nous allons donc démontrer un résultat de nulle contrôlabilité dans $\Omega_C(\delta) := (x_0 + \delta, x_1 + T - \delta) \times (0, 1)$ pour tout $0 < \delta < (x_1 - x_0)/2$. Pour cela, il faut d’abord une inégalité d’observabilité pour le problème homogène adjoint.

3. Inégalité d’observabilité

On suppose que $0 < T < L - x_1$ et on définit $\Omega_C(\delta) := (x_0 + \delta, x_1 + T - \delta) \times (0, 1)$ où $0 < \delta < (x_1 - x_0)/2$. On montre alors l’inégalité d’observabilité suivante :

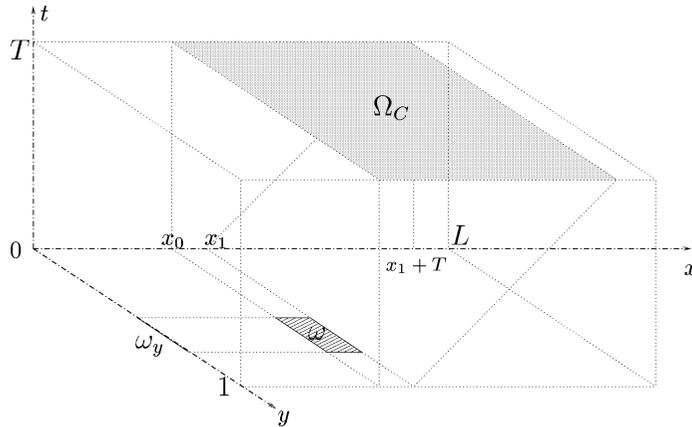


Figure 1. – Le domaine d’influence, Ω_C .

THÉORÈME 3.1. – *Sous les hypothèses précédentes, il existe $C(\delta, \omega_y) > 0$ telle que, toute solution $v \in \mathcal{C}([0, T]; L^2((0, L) \times (0, 1))) \cap \mathcal{C}([0, L]; L^2((0, T) \times (0, 1))) \cap L^2((0, L) \times (0, T); H_0^1(0, 1))$ du problème*

$$v_t + v_x + v_{yy} = 0, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

vérifie

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,L) \times (0,1)} v(x, y, 0)^2 dy dx + \iint_{(0,1) \times (0,T)} v(0, y, t)^2 dt dy \\ & \leq C(\delta, \omega_y) \left(\iiint_{\omega \times (0,T)} v(x, y, t)^2 dt dy dx + \iint_{\Omega \setminus \Omega_C(\delta)} v(x, y, T)^2 dy dx \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,1) \times (0,T)} v(L, y, t)^2 dt dy \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Principe de la preuve (voir la preuve dans [10]). – Dans le cas où v est une solution régulière de (3.1), on remarque que, le long des caractéristiques, v est solution d’une équation parabolique non dégénérée. En effet, pour tout $\xi \in (-T, L)$ fixé, $w^\xi(y, t) := v(\xi + t, y, t)$ est la solution de

$$\begin{cases} w_t + w_{yy} = 0, & (y, t) \in (0, 1) \times (t_1^\xi, t_2^\xi), \\ w(1, t) = w(0, t) = 0, & t \in (t_1^\xi, t_2^\xi), \end{cases} \quad (3.3)$$

où $t_1^\xi = \max(0, -\xi)$ and $t_2^\xi = \min(L, L - \xi)$. Or, les solutions de (3.3) sont d’énergie croissante. De plus, (3.3) étant un problème parabolique non dégénéré, elles vérifient les estimations de Carleman (voir par exemple [7,8,5,1]).

La preuve de l’inégalité d’observabilité (3.2) est alors basée sur une décomposition du domaine $\Omega \times (0, T)$. Sur chaque sous-domaine, on se place le long des caractéristiques et on utilise la croissance de l’énergie des solutions de (3.3) éventuellement combinée avec les estimations de Carleman.

4. Résultat de nulle contrôlabilité

Enfin, on en déduit le résultat de nulle contrôlabilité suivant :

THÉORÈME 4.1. – *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2((0, 1) \times (0, T))$, il existe $f \in L^2(\omega \times (0, T))$ telle que la solution u de (1.2) vérifie*

$$u(x, y, T) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega_C(\delta).$$

Principe de la preuve (voir la preuve dans [10]). – On introduit le problème pénalisé suivant

$$\inf\{J_\varepsilon(f) \mid f \in L^2(\omega \times (0, T))\}, \tag{4.1}$$

où

$$J_\varepsilon(f) := \frac{1}{2} \iiint_{\omega \times (0, T)} f^2 \, dt \, dy \, dx + \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\Omega_C(\delta)} u_f(x, y, T)^2 \, dy \, dx,$$

avec u_f la solution de (1.2) associée à f .

Si $(u_\varepsilon, f_\varepsilon)$ est solution de (4.1), alors $f_\varepsilon = -v_\varepsilon \chi_\omega$ où v_ε est la solution de

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{yy} = 0, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ v(L, y, t) = 0, & (y, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ v(x, y, T) = \frac{1}{\varepsilon} \chi_{\Omega_C(\delta)} u_\varepsilon(x, y, T), & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Grâce à (3.2), on peut montrer que $(f_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \chi_{\Omega_C(\delta)} u_\varepsilon(T))_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(\Omega)$. Ces estimations a priori permettent de passer à la limite dans (4.2) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ ce qui donne une solution du problème de nulle contrôlabilité.

Références bibliographiques

- [1] P. Albano, P. Cannarsa, Carleman estimates for second order parabolic operators with applications to control theory, en préparation.
- [2] J.-M. Buchot, Thèse de doctorat, en préparation.
- [3] J.-M. Buchot, J.-P. Raymond, A linearized model for boundary layer equations, in: Proceedings Oberwolfach, June 4–10, 2000, à paraître.
- [4] J.-M. Buchot, P. Villedieu, Construction de modèles pour le contrôle de la position de transition laminaire-turbulent sur une plaque plane, Technical report, 1/3754.00 DTIMT/T, 1999.
- [5] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, The cost of approximate controllability for heat equations: The linear case, *Adv. Differential Equations* 5 (2000) 465–514.
- [6] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, Null and approximate controllability for weakly blowing-up semilinear heat equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 17 (2000) 583–616.
- [7] A.V. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, Controllability of evolution equations, in: Lecture Notes Series # 34, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, 1996.
- [8] G. Lebeau, L. Robbiano, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, *Comm. Partial Differential Equations* 20 (1995) 335–356.
- [9] O.A. Oleinik, V.N. Samokhin, *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*, Appl. Math. Math. Comput., Vol. 15, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 1999.
- [10] P. Martinez, J.-P. Raymond, J. Vancostenoble, Regional null controllability of a Crocco type linearized equation, en préparation.