C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 667–670

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*
(Physique mathématique/*Mathematical Physics*)

Calcul du label des gaps pour les quasi-cristaux

Moulay-Tahar Benameur [a], Hervé Oyono-Oyono [b]

[a] Institut G. Desargues, Université de Lyon I, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne, France
[b] Université Blaise Pascal, 34, avenue Carnot, 63006 Clermont-Ferrand cedex, France

Reçu le 10 janvier 2002 ; accepté le 4 février 2002

Note présentée par Alain Connes.

Résumé Dans cette Note, nous présentons une solution au problème du label des gaps pour les quasi-cristaux et démontrons ainsi la validité de la conjecture de Bellissard. Nous utilisons le théorème de l'indice mesuré pour les laminations d'un coté et la naturalité du caractère de Chern longitudinal de l'autre. ***Pour citer cet article : M.-T. Benameur, H. Oyono-Oyono, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 667–670.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Computation of the gap-labelling for quasi-crystals

Abstract We give in the present Note a proof of the Bellissard gap-labelling conjecture for quasi-crystals. Our main tools are the measured index theorem for laminations on the one hand, and the naturality of the longitudinal Chern character on the other hand. ***To cite this article: M.-T. Benameur, H. Oyono-Oyono, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 667–670.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et notations

Soit Ω un ensemble de Cantor muni d'une action minimale du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^p$. Supposons que μ soit une mesure de probabilité $\mathbb{Z}^p$-invariante sur Ω. Alors μ induit une trace τ^μ sur la C^*-algèbre $C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p$, et donc un homomorphisme additif de la K-théorie de $C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p$ vers $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{Z}[\mu]$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par les μ-mesures d'ouverts-compacts de Ω, alors la conjecture de Bellissard peut s'énoncer de la manière suivante, voir par exemple [1,2] :

CONJECTURE 1.1. – *L'image par τ_*^μ de la K-théorie de $C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p$ coincide avec $\mathbb{Z}[\mu]$.*

Il est facile de ramener le cas général au cas où p est pair, voir [3], et nous supposerons désormais que p est pair.

2. Indice longitudinal et caractère de Chern

La suspension associée est par définition l'espace topologique compact $V_\Omega = \frac{\Omega \times \mathbb{R}^p}{\mathbb{Z}^p}$. Cet espace est naturellement muni d'une structure d'espace feuilleté. Soit $\partial : C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes S^+ \to C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes S^-$ l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{R}^p$, où S^+ et S^- sont les representations irréductibles de $\mathrm{Spin}(p)$. Soit e une projection de

Adresses e-mail : benameur@desargues.univ-lyon1.fr (M.-T. Benameur); herve.oyono@math.univ-bpclermont.fr (H. Oyono-Oyono).

S1631-073X(02)02312-9/FLA

$M_n(C(V_\Omega))$ et soit $\tilde{e}$ la projection $\mathbb{Z}^p$-invariante de $C(\Omega \times \mathbb{R}^p) \otimes M_n(\mathbb{C})$ qui lui correspond. On suppose que $\tilde{e}$ est longitudinalement lisse, alors l'opérateur :

$$\tilde{e} \circ (\mathrm{Id}_{C(\Omega)} \otimes \partial \otimes I_n) : \tilde{e}\big(C(\Omega) \otimes C^\infty\big(\mathbb{R}^p\big) \otimes S^+ \otimes \mathbb{C}^n\big) \longrightarrow \tilde{e}\big(C(\Omega) \otimes C^\infty\big(\mathbb{R}^p\big) \otimes S^- \otimes \mathbb{C}^n\big)$$

est un opérateur différentiel elliptique dans la $\mathbb{R}^p$-direction, qui est $\mathbb{Z}^p$-invariant. Il induit donc un opérateur longitudinalement elliptique $\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ sur V_Ω. En utilisant les résultats de [5] et la version étendue de [7], on associe à l'opérateur $\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ un indice longitudinal $\mathrm{Ind}_{V_\Omega} \partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ qui appartient au groupe de K-théorie $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p)$. Le théorème suivant est dû à A. Connes (*voir* [4] et aussi [3]).

THÉORÈME 2.1. – *L'application $e \mapsto \mathrm{Ind}_{V_\Omega} \partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ induit un isomorphisme* :

$$\mu_\Omega^{\mathbb{Z}^p} : K_0\big(C(V_\Omega)\big) \xrightarrow{\simeq} K_0\big(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p\big).$$

Ce théorème ramène la conjecture de Bellissard au problème du calcul des termes apparaissant dans le théorème de l'indice mesuré pour l'opérateur $\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$. Soit $\Omega^k(\mathbb{R}^p)$ l'espace des k-formes differentielles sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$, induit de sa topologie usuelle. Une k-forme longitudinale sur V_Ω est une application continue $\mathbb{Z}^p$-equivariante $\phi : \Omega \to \Omega^k(\mathbb{R}^p)$. L'espace des k-formes differentielles longitudinales sur V_Ω est noté $\Omega^k_\ell(V_\Omega, \mathbb{R})$. Si ϕ est un élément de $\Omega^k_\ell(V_\Omega, \mathbb{R})$, alors la différentielle longitudinale $d_\ell(\phi)$ est par définition la $(k+1)$-forme differentielle qui est l'application $\mathbb{Z}^p$-équivariante $\omega \mapsto d(\phi(\omega))$ où d est la différentielle de de Rham sur $\mathbb{R}^p$. Le complexe ainsi obtenu est le complexe longitudinal de V_Ω, sa cohomologie est notée :

$$\mathrm{H}^*_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^k_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}) = \mathrm{H}^e_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}) \bigoplus \mathrm{H}^o_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}).$$

Notons maintenant par $C^{\infty,0}(V_\Omega)$ l'algèbre des fonctions continues sur V_Ω qui sont longitudinalement lisses. Soit e une projecteur de $M_n(C^{\infty,0}(V_\Omega))$ et soit $\tilde{e}$ le projecteur $\mathbb{Z}^p$-invariant associé. Alors la forme différentielle $\mathrm{Tr}\, \tilde{e} \exp(d_\ell \tilde{e} _\ell \tilde{e}/(2\mathrm{i}\pi))$ est une forme longitudinale est d_ℓ-fermée. De plus, la classe de $\mathrm{Tr}\, \tilde{e} \exp(d_\ell \tilde{e}_\ell \tilde{e}/(2\mathrm{i}\pi))$ dans $\mathrm{H}^*_{\ell(V_\Omega,\mathbb{R})}$ ne dépend due de la classe de K-théorie de e dans $K_0(C^{\infty,0}(V_\Omega))$. Nous déduisons alors une définition du caractère de Chern longitudinal $\mathrm{ch}_l : K_0(C(V_\Omega)) \to \mathrm{H}^e_\ell(V_\Omega, \mathbb{R})$. La définition du caractère de Chern longitudinal dans le cas impair se déduit alors du cas pair. Nous obtenons donc un morphisme

$$\mathrm{ch}_l : K_*\big(C(V_\Omega)\big) = K_0\big(C(V_\Omega)\big) \oplus K_1\big(C(V_\Omega)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^*_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}) = \mathrm{H}^e_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{H}^o_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}).$$

Si (U_0, U_1) est une paire ouverte de V_Ω, on a de même un morphisme $\mathrm{ch}_l : K_*(C_0(U_0 \setminus U_1)) \to \mathrm{H}^*_{\ell,c}(U_0, U_1, \mathbb{R})$. Le théorème suivant est démontré dans [3].

THÉORÈME 2.2. – *Le caractère de Chern longitudinal entrelace les suites exactes en K-théorie et en cohomologie longitudinale, associées à toute paire ouverte (U_0, U_1).*

3. Le cycle fondamental

Soit χ la fonction caractéristique de l'ouvert $U =]0,1[^p$ dans $\mathbb{R}^p$. On définit $C_{\mu,\mathbb{Z}^p} : \Omega^p_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, par :

$$C_{\mu,\mathbb{Z}^p}(\phi) := \left\langle \mu \otimes \int_{\mathbb{R}^p}, \chi\phi \right\rangle.$$

PROPOSITION 3.1 ([3]). – *Si ϕ est un d_ℓ-cobord, alors $\langle C_{\mu,\mathbb{Z}^p}, \phi \rangle = 0$.*

Pour citer cet article : M.-T. Benameur, H. Oyono-Oyono, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 667–670

Ceci montre que $C_{\mu,\mathbb{Z}^p}$ induit une application sur $\mathrm{H}_\ell^p(V_\Omega,\mathbb{R})$. Notons par $C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$ l'espace des coinvariants de l'action de $\mathbb{Z}^p$ sur $C(\Omega,\mathbb{R})$, i.e., le quotient de $C(\Omega,\mathbb{R})$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $n(f)-f$. Si $\phi\in\Omega_\ell^p(V_\Omega,\mathbb{R})$, on définit une fonction continue $\Psi_{\mathbb{Z}^p}(\phi)$ sur Ω par $\Psi_{\mathbb{Z}^p}(\phi)(\omega):=\int_{]0,1[^p}\phi(\omega,x)\,\mathrm{d}x$, $\forall\omega\in\Omega$.

PROPOSITION 3.2 ([3]). – *L'application $\phi\to\Psi_{\mathbb{Z}^p}(\phi)$ induit une application de $\mathrm{H}_\ell^p(V_\Omega,\mathbb{R})$ vers $C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$, qui est en outre un isomorphisme, i.e.*

$$\mathrm{H}_\ell^p(V_\Omega,\mathbb{R})\cong C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}.$$

Puisque la mesure μ est $\mathbb{Z}^p$-invariante, elle induit une forme linéaire sur $C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$ que nous notons $\Phi_{\mathbb{Z}^p,\mu}$. Le triangle suivant est alors commutatif [3] :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_\ell^p(V_\Omega,\mathbb{R}) \arrow[rr, "\Psi_{\mathbb{Z}^p}", "\cong"'] \arrow[dr, "C_{\mu,\mathbb{Z}^p}"'] & & C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p} \arrow[dl, "\Phi_{\mathbb{Z}^p,\mu}"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

4. Idée de la preuve

Rappelons d'abord que d'après un résultat de [6], le groupe d'homologie $\mathrm{H}_*(\mathbb{Z}^p,C(\Omega,\mathbb{Z}))$ est sans torsion. Le caractère de Chern usuel à valeurs dans la cohomologie de Cech fournit un morphisme $K^*(X)\to\mathrm{H}^*(X,\mathbb{R})$ pour tout espace topologique X. Cela induit un morphisme naturel $\mathrm{ch}:K^*(U)\to\mathrm{H}_{\ell,c}^*(U,\mathbb{R})$ pour tout ouvert U de V_Ω, que nous appellerons aussi caractère de Chern pour simplifier. En utilisant le Théorème 2.2, on déduit que le caractère de Chern longitudinal induit un morphisme entre les suites spectrales associées. Ici, la suite spectrale associée à la K-théorie est la suite de Kasparov alors que celle associée à la cohomologie longitudinale est la suite spectrale usuelle, voir [3] pour plus de détails. Pour les termes E^2, le caractère de Chern longitudinal ch_ℓ et le caractère de Chern ch induisent la flèche associée à l'inclusion des coefficients $\bigoplus_j\mathrm{H}_j(\mathbb{Z}^p,C(\Omega,\mathbb{Z}))\hookrightarrow\bigoplus_j\mathrm{H}_j(\mathbb{Z}^p,C(\Omega,\mathbb{R}))$. En particulier, on obtient :

PROPOSITION 4.1. – *Les deux morphismes* $\mathrm{ch}:K^*(V_\Omega)\to\mathrm{H}_l^*(V_\Omega,\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{ch}_\ell:K^*(V_\Omega)\to\mathrm{H}_\ell^*(V_\Omega,\mathbb{R})$ *coincident.*

Remarque 4.1. – On peut même montrer que ces caractères de Chern coincident avec le caractère de Chern–Connes en homologie cyclique périodique et que cette dernière homologie est isomorphe à la cohomologie longitudinale [3].

Toutes ces suites spectrales dégénérent aux termes E^2. En particulier et puisque le gradué associé à la filtration de $K_*(C(V_\Omega))$ donnée par la suite spectrale de Kasparov est le groupe sans torsion $\bigoplus_k\mathrm{H}_k(\mathbb{Z}^p,C(\Omega,\mathbb{Z}))$, le groupe abélien $K_*(C(V_\Omega))$ est aussi sans torsion. Plus précisèment, on a :

THÉORÈME 4.1 ([6]). – *Le morphisme* $\mathrm{ch}:K_*(V_\Omega)\to\mathrm{H}_\ell^*(V_\Omega,\mathbb{R})$ *est injectif à image homogène (i.e. son image est graduée par la graduation de* $\mathrm{H}_\ell^*(V_\Omega,\mathbb{R})$*). En plus, l'image de* $\mathrm{ch}:K_*(V_\Omega)\to\mathrm{H}_\ell^*(V_\Omega,\mathbb{R})$ *est isomorphe à* $\bigoplus_j\mathrm{H}_j(\mathbb{Z}^p,C(\Omega,\mathbb{Z}))$*.*

Finalement, pour finir la preuve de la conjecture nous utilisons le résultat d'intégralité suivant :

PROPOSITION 4.2 ([3]). – *Soit ch_ℓ^p la k^{eme} composante du caractère de Chern longitudinal. Alors, $\psi_{\mathbb{Z}^p}(\mathrm{ch}_\ell^p(K_0(V_\Omega))$ appartient à $C(\Omega,\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^p}$.*

Expliquons maintenant brièvement comment déduire la conjecture de Bellissard. On peut d'abord facilement montrer l'inclusion $\mathbb{Z}[\mu] \subset \tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p))$. Par Théorème 2.1, on déduit que :

$$\tau_*^\mu\big(K_0\big(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p\big)\big) = \big\{ \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}^p,\mu}(\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}) - \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}^p,\mu}\big(\partial^{e'}_{\Omega,\mathbb{R}^p}\big), [e] - [e'] \in K_0\big(C^{\infty,0}(V_\Omega)\big)\big\}.$$

Ensuite, d'après le théorème de l'indice mesuré de Connes [7], on peut déduire que :

$$\tau_*^\mu\big(K_0\big(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p\big)\big) = \big\langle \mathrm{ch}^p_\ell\big(K^0(V_\Omega)\big), [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\big\rangle.$$

D'après les définitions de $[C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]$ et $\psi_{\mathbb{Z}^p}$, on a :

$$\big\langle x, [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\big\rangle = \big\langle \psi_{\mathbb{Z}^p}(x), \mu\big\rangle, \quad \forall x \in \mathrm{H}^p_\ell(V_\Omega, \mathbb{R}).$$

Par conséquent $\langle \mathrm{ch}^p_\ell(e), [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\rangle = \langle \psi_{\mathbb{Z}^p}(\mathrm{ch}^p_\ell(e)), \mu\rangle$. Mais la Proposition 4.2 implique alors que $\psi_{\mathbb{Z}^p}(\mathrm{ch}^p_\ell(e)) \in C(\Omega, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^p}$. Ainsi :

$$\tau_*^\mu\big(K_0\big(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p\big)\big) \subset \mu\big(C(\Omega, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^p}\big) = \mathbb{Z}[\mu].$$

Remerciements. Nous tenons tout particulièrement à remercier J. Bellissard de nous avoir expliqué le problème du label des gaps et de ses encouragements constants durant la préparation de ce travail. Nous remercions aussi E. Contensou, T. Fack, J. Kellendonk, A. Legrand, V. Nistor et C. Schochet pour diverses discussions autour de ce problème.

Références bibliographiques

[1] J. Bellissard, Gap labelling theorem's for Schrödinger's operators, in: M. Waldschmidt, P. Moussa, J.M. Luck, C. Itzykson (Eds.), From Number Theory to Physics, Springer, 1992, pp. 538–630.
[2] J. Bellissard, E. Contensou, A. Legrand, K-théorie des quasicristaux, image par la trace : le cas du réseau octogonal, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 327 (1998) 197–200.
[3] M.T. Benameur, H. Oyono-Oyono, Computation of the gap-labelling for quasi-crystal: a foliation approach, Preprint 2001.
[4] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, New York, 1994.
[5] A. Connes, G. Skandalis, The longitudinal index theorem for foliations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 20 (1984) 1139–1183.
[6] A. Forrest, J. Hunton, The cohomology and K-theory of commuting homeomorphisms of the Cantor set, Ergodic Theory Dynamical Systems 19 (1999) 611–625.
[7] C.C. Moore, C. Schochet, Global Analysis on Foliated Spaces, Springer, Berlin, 1988.