

Solutions variationnelles du problème stationnaire des fluides de grade trois

Jean-Marie Bernard ^a, El Hacène Ouazar ^b

^a IUT d'Evry Val d'Essonne, 22, allée Jean-Rostand, 91025 Evry cedex, France

^b École normale supérieure, Kouba, 16050 Alger, BP 92, Algérie

Reçu et accepté le 4 février 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé

Dans cette Note, consacrée au problème stationnaire des fluides de grade trois, nous montrons l'existence de solutions et l'unicité, pour une frontière de classe $C^{2,1}$ et une donnée petite, par une méthode d'estimations d'énergie. La résolution de ce problème en dimension trois requière une condition sur les paramètres intervenant dans l'équation, qui permet de montrer que l'opérateur différentiel de l'équation vérifie des propriétés d'ellipticité. *Pour citer cet article : J.-M. Bernard, E.H. Ouazar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 609–613.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Variational solutions of stationary problem of third grade fluids

Abstract

We show the existence of solutions and the uniqueness of the stationary problem of third grade fluids, for a boundary of class $C^{2,1}$ and small data, by a method of energy estimates. The resolution of the problem of third grade fluids in three dimensions requires a condition on the parameters occurring in the equation, which allows us to show that the differential operator of the equation verifies properties of ellipticity. *To cite this article: J.-M. Bernard, E.H. Ouazar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 609–613.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The equations (1) and (2) describe the motion of incompressible fluids of grade three in a bounded domain Ω of \mathbb{R}^3 , see [9]. An efficient way to study the second or third grade fluids is the method of energy estimates, introduced by Cioranescu and Ouazar in [5] and [6] and extended by Cioranescu and Girault in [5] and Bernard in [2] and [3]. In this Note, we propose to show that the method of Bernard for the stationary second grade fluids can be generalized to prove the existence of solutions and uniqueness of the stationary problem of third grade fluids, for a boundary of class $C^{2,1}$ and a small data in three dimensions. A condition on the parameters occurring in the equation allows us to show, as a crucial consequence, that the differential operator of the equation verifies properties of ellipticity.

As in [7], we introduce V_2 defined by (3). From the equivalence of norms (4), we derive the essential bound (6).

Problem (1), (2) is set into the equivalent variational formulation (8). It is discretized by Galerkin’s method (13) with the special basis (11) of eigenfunctions, which verify (12) and are such that the functions $\mathbf{curl}(\Delta \mathbf{w}_j)$ belong to $H^1(\Omega)^3$.

From (13) and the properties of ellipticity (9) and (10), we derive energy estimate (14) for the discrete solution. A sharp estimate of the specific term of third grade yields (16), which is a property of stability with respect to the data \mathbf{f} . Together with properties (11) and (12) of the special basis, the energy estimate (14) allows us to prove that $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ verifies a polynomial inequality of four degrees. Hence, with in addition (16), in the same way as in [3], we derive, by contradiction, that the discrete solution is bounded in V_2 , provided the data \mathbf{f} is sufficiently small. This bound allows one to pass to the limit in m , thereby showing existence of solutions with small data. Then, in the same way as to prove (16), we show the uniqueness. These results are summarized in the following theorem:

THEOREM. – *Let Ω be a bounded, simply-connected open set of \mathbb{R}^3 with a boundary Γ of class $C^{2,1}$. If the data $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}; \Omega)$ is small enough, then the problem (1), (2) has a unique solution $(\mathbf{u}, p) \in V_2 \times (H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. Moreover, \mathbf{u} is bounded in V_2 .*

We can prove analogous results in two dimensions. Moreover, a closer look shows that our study can be generalized and leads us to a result of uniqueness in a class of small solutions in $W^{2,p}$, $p > 3$.

Next, it is possible to extend our results of existence and uniqueness to the case where Ω is non-simply connected, by a method analogous to that of Bernard in [2,3]. Finally, from the same reference, we can derive regularity results.

1. Introduction

Dans cette Note nous étudions la résolution des équations stationnaires satisfaites par des fluides incompressibles de grade trois dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 , borné et simplement connexe, de frontière Γ de classe $C^{2,1}$. Une étude analogue, plus simple, peut être faite en dimension deux. Ces modèles de fluides sont décrits par exemple dans Noll et Truesdell [9]. Ce problème s’écrit : chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et une fonction scalaire p définies dans Ω solution de :

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}) \times \mathbf{u} - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u} \cdot \nabla(\Delta \mathbf{u}) - \beta \operatorname{div}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \tag{2}$$

où $A(\mathbf{u})$ (cf. Noll et Truesdell [9]) est défini par $(A(\mathbf{u}))_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ et $|A(\mathbf{u})|^2 = \operatorname{tr}(A(\mathbf{u})^2)$. Les constantes α_1 , ν et β sont positives et vérifient avec α_2 la condition physique $|\alpha_1 + \alpha_2| < \sqrt{24\nu\beta}$.

Une approche efficace pour étudier les fluides de second et troisième grade est la méthode des estimations d’énergie, introduite en 1984 par Cioranescu et Ouazar dans [6,7] et [10]. Cette méthode a été étendue en 1997 par Cioranescu et Girault dans [5] et plus récemment, par Bernard dans [2] et [3]. Depuis quelques années, des auteurs tels que Coscia et Galdi dans [8], Bresh et Lemoine dans [4] et Videman dans [11] ont étudié ces problèmes par une autre approche : ils décomposent le système original d’équations de différentes manières, puis appliquent un théorème de point fixe de type Schauder. Ils obtiennent des résultats similaires. Le but de cette Note est de montrer que la méthode utilisée dans [3] pour résoudre le problème stationnaire de grade deux peut être généralisée au cas du grade trois. De la condition physique $|\alpha_1 + \alpha_2| < (24\nu\beta)^{1/2}$ on déduit des propriétés d’ellipticité de l’opérateur $\nu|A(\mathbf{u})|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\operatorname{tr}(A(\mathbf{u})^3) + \beta|A(\mathbf{u})|^4$, qui, jointes à une fine estimation du terme spécifique de grade trois, permettent de démontrer l’existence de solutions et l’unicité, pour une frontière de classe $C^{2,1}$ et une donnée petite.

2. Formulation du problème et notation

On suppose Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 simplement connexe, de frontière $C^{2,1}$. Suivant l'approche de [7], on est amené à définir les espaces

$$V = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \}, \quad V_2 = \{ \mathbf{v} \in V; \operatorname{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3 \}. \quad (3)$$

On munit V du produit scalaire : $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha_1(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ et de la norme associée $(\mathbf{v}, \mathbf{v})_V^{1/2}$, équivalente à la norme H^1 . On rappelle le résultat fondamental suivant démontré dans [5].

LEMME 1. – Soit Ω comme ci-dessus. Alors tout \mathbf{v} dans V_2 appartient à $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $C(\alpha_1)$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V_2, \quad \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1) \|\operatorname{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4)$$

On définit :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_2} = (\operatorname{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}), \operatorname{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{V_2} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_2}^{1/2}. \quad (5)$$

On déduit alors les majorations essentielles (C_1 et C_2 sont des constantes de Sobolev) :

$$\forall \mathbf{v} \in (H^3(\Omega))^N, \quad \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_1 C(\alpha_1) \|\mathbf{v}\|_{V_2}, \quad (6)$$

$$\forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^N, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq C_2^{3/4} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (7)$$

Compte tenu de l'égalité : $(-\operatorname{div}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u})), \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u}), A(\mathbf{v}))$, la formulation variationnelle de (1) et (2) s'écrit : pour $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, chercher $\mathbf{u} \in V_2$, tel que

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\operatorname{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}) \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\alpha_1 + \alpha_2)[(\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}) - 2(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \Delta \mathbf{u})] + \frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u}), A(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \quad (8)$$

Le lemme suivant, qui est une extension d'un lemme de [1], permet d'obtenir des propriétés d'ellipticité de l'opérateur différentiel de l'équation variationnelle.

LEMME 2. – Soit A une matrice symétrique d'ordre 3 à trace nulle et soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant $|\alpha| \leq \sqrt{24\nu\beta}$, alors on a les inégalités suivantes

$$\nu|A|^2 + \alpha \operatorname{tr}(A^3) + \beta|A|^4 \geq \frac{24\nu\beta - \alpha^2}{24\beta}|A|^2, \quad (9)$$

$$\nu|A|^2 + \alpha \operatorname{tr}(A^3) + \beta|A|^4 \geq \frac{\sqrt{24\nu\beta} - |\alpha|}{\sqrt{6}}|A|^3 \geq \frac{24\nu\beta - \alpha^2}{24\sqrt{\nu\beta}}|A|^3. \quad (10)$$

3. Estimations a priori

La solution du problème (8) est construite au moyen d'une discrétisation de Galerkin avec la base spéciale de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$ dans V_2 :

$$(\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_{V_2} = \lambda_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V_2. \quad (11)$$

On peut montrer (voir [3]) que $\operatorname{rot}(\Delta \mathbf{w}_j) \in H^1(\Omega)^3$ et que, pour tout $j \leq 1$,

$$\forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega), \quad (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot}(\mathbf{w}_j - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}_j)) = \lambda_j(\mathbf{v}, \mathbf{w}_j). \quad (12)$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale sur V_m pour le produit scalaire dans V_2 . Nous définissons une solution approchée du problème (8) par $\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^m c_{j,m} \mathbf{w}_j$, vérifiant pour $1 \leq j \leq m$:

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{w}_j) + (\alpha_1 + \alpha_2) \left((\nabla(\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m), \nabla \mathbf{w}_j) - 2(\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{w}_j, \Delta \mathbf{u}_m) \right) \\ & + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) + \frac{\beta}{2} (|A(\mathbf{u}_m)|^2 A(\mathbf{u}_m), A(\mathbf{w}_j)) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j). \end{aligned} \quad (13)$$

On obtient l'existence de solutions approchées et une première estimation en utilisant le théorème de Brouwer et le Lemme 2.

LEMME 3. – Soit Ω comme dans le Lemme 1 et $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$. Notons \mathcal{P} la constante de Poincaré. Alors le problème (13) a une solution $\mathbf{u}_m \in V_2$ qui vérifie

$$\|\mathbf{u}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{24\beta\mathcal{P}}{24\nu\beta - (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (14)$$

Le lemme suivant est fondamental, aussi bien pour montrer l'unicité que pour majorer \mathbf{u}_m dans V_2 , majoration dont on déduira l'existence de solutions. Il est obtenu grâce à une fine estimation du terme spécifique de grade trois.

LEMME 4. – Sous les hypothèses du Lemme 3, on note $\mathbf{u}_{m,i}$ une solution du problème (13) avec \mathbf{f}_i comme second membre, $i = 1, 2$. Si $\mathbf{u}_{m,2}$ vérifie

$$\|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} \leq \rho, \quad \text{avec } \rho < \frac{24\nu\beta - (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{24\beta C(\alpha_1) \max(K_3, 12\sqrt{\nu\beta}C_1)}, \quad (15)$$

où K_3 dépend de α_1, α_2 et des constantes de Sobolev C_1 et C_2 , alors on a l'inégalité

$$\|\mathbf{u}_{m,1} - \mathbf{u}_{m,2}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{48\beta\mathcal{P}}{24\nu\beta - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 24\beta K_3 C(\alpha_1)\rho} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (16)$$

Soit $\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^m \xi_j \mathbf{w}_j$ une solution du problème (13). En multipliant l'équation (13) par $\lambda_i \xi_i$, en appliquant (12) et en sommant par rapport à i , on montre que $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ vérifie une inéquation polynomiale de degré quatre. Ensuite, par une méthode analogue à celle introduite dans [3] pour le grade deux, utilisant les Lemmes 3 et 4, on obtient par contradiction que, pour une donnée assez petite, $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ est majoré par la plus petite racine strictement positive du polynôme $P(X)$ associé à l'inéquation polynomiale précédente. D'où le théorème suivant :

THÉORÈME 5. – Sous les hypothèses du Lemme 3, si la donnée $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}; \Omega)$ est assez petite, alors toute solution du problème (13) satisfait la borne supérieure :

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \rho(\alpha_1, \nu, \beta, \|\mathbf{f}\|_{H(\mathbf{rot}; \Omega)}), \quad (17)$$

où ρ est la plus petite racine positive du polynôme P .

4. Existence de solutions et unicité

L'estimation précédente permet le passage à la limite (l'injection de V_2 dans $H^2(\Omega)^3$ est compacte) et donne l'existence de solutions. L'unicité se démontre par un calcul analogue à celui du Lemme 4. D'où le théorème suivant, qui constitue le principal résultat de cette Note.

THÉORÈME 6. – *Sous les hypothèses du Lemme 3, si la donnée $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}; \Omega)$ est assez petite, alors le problème (1), (2) a une unique solution $(\mathbf{u}, p) \in V_2 \times (H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. De plus cette solution est bornée dans V_2 .*

On peut obtenir des résultats analogues en dimension deux. Avec Γ de classe $C^{1,1}$, une méthode analogue nous conduit à l'unicité dans une classe de solutions assez petites dans $W^{2,p}$, $p > 3$. Il est aussi possible d'étendre les résultats au cas Ω non simplement connexe et d'obtenir des résultats de régularité par une méthode analogue à Bernard dans [2] et [3].

Références bibliographiques

- [1] C. Amrouche, D. Cioranescu, On a class of fluids of grade 3, *Internat. J. Nonlinear Mech.* 32 (1) (1997) 73–88.
- [2] J.-M. Bernard, Fluides de second et troisième grade en dimension trois : solution globale et régularité, Thèse de doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1998.
- [3] J.-M. Bernard, Stationary problem of second grade fluids in three dimensions: existence, uniqueness and regularity, *Math. Meth. Appl. Sci.* 22 (1999) 655–687.
- [4] D. Bresch, J. Lemoine, Stationary solutions for second-grade fluids equations, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 8 (5) (1998).
- [5] D. Cioranescu, V. Girault, Weak and classical solutions of a family of second grade fluids, *Internat. J. Nonlinear Mech.* 32 (2) (1997) 317–335.
- [6] D. Cioranescu, E.H. Ouazar, Existence et unicité pour les fluides de second grade, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 298 (1984) 285–287.
- [7] D. Cioranescu, E.H. Ouazar, Existence and uniqueness for fluids of second grade, in: *Nonlinear Partial Differential Equations, Collège de France Seminar, Vol. 109*, Pitman, 1984, pp. 178–197.
- [8] V. Coscia, G.P. Galdi, Existence, uniqueness and stability of regular steady motions of second-grade fluid, *Internat. J. Nonlinear Mech.* 29 (4) (1994) 493–506.
- [9] W. Noll, C. Truesdell, *The Nonlinear Field Theory of Mechanics, Handbuch of Physik, Vol. III*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [10] E.H. Ouazar, Sur les fluides de second grade, Thèse 3ème cycle, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1981.
- [11] J.H. Videman, Mathematical analysis of viscoelastic non-Newtonian fluids, Thesis, Université de Lisbonne, 1997.