C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 655–660

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Comportement asymptotique semiclassique de l'amplitude de diffusion pour des perturbations captives

Laurent Michel

Département de mathématiques appliquées, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

Reçu le 8 février 2002 ; accepté le 19 février 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé On étudie le comportement semiclassique lorsque $h \to 0$ de l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ associée à un opérateur de Schrödinger $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)$ pour une perturbation de courte portée $V(x)$. On montre que si l'on modifie le potentiel $V(x)$ dans un domaine contenu dans $\{x : V(x) > \lambda\}$, l'amplitude de diffusion $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ est modifiée par un terme d'ordre $O(h^\infty)$. De plus, si on fait une hypothèse d'échappement de certaines trajectoires, on obtient une asymptotique de l'amplitude de diffusion. ***Pour citer cet article : L. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 655–660.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations

Abstract We study the semi-classical behavior when $h \to 0$, of the scattering amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ associated to the Schrödinger operator $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V(x)$ for short range perturbations $V(x)$. We show that if we modify the potential $V(x)$ in a domain contained in $\{x : V(x) > \lambda\}$, the scattering amplitude $f(\theta, \omega, \lambda, h)$ is changed by a term of order $O(h^\infty)$. Moreover, under an additional escape assumption, we get an asymptotics of the scattering amplitude. ***To cite this article: L. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 655–660.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Consider the Schrödinger operator $P(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta + V$, in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $0 < h \leqslant 1$. We assume that the potential $V(x)$ satisfies the following condition:

ASSUMPTION $(\mathrm{V})_\rho$. – V is a real C^∞-smooth function such that:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\partial_x^\alpha V(x)\right| \leqslant C_\alpha \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}(\rho + |\alpha|)}, \quad \rho > 1.$$

Adresse e-mail : lmichel@math.u-bordeaux.fr (L. Michel).

S1631-073X(02)02327-0/FLA

The operator $P(h)$ with domain $D(P(h)) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^n)$ is self-adjoint in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Moreover, we can define the scattering amplitude $f(\theta,\omega,\lambda,h)$ related to $P_0(h) = -\frac{1}{2}h^2\Delta$ and $P(h)$, which is smooth in $(\theta,\omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta=\omega\}$. Robert and Tamura [6] have studied the asymptotic behavior of f as $h \to 0$ for fixed $\theta,\omega \in S^{n-1}$, $\theta \neq \omega$, in the case where the energy λ is fixed in a non-trapping interval. More precisely, denote by $(q(t,y,\eta), p(t,y,\eta))$ the solution to the Hamiltonian system (1) and recall the non-trapping condition

(NT): We say that the energy λ is non-trapping for the symbol $\frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$ if for any $R>0$ large enough, there exists $T = T(R)$ such that $|q(t,x,\xi)| > R$ for $|t| > T$ when $|x| < R$ and $\lambda = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$.

For ω and θ fixed in S^{n-1} and for λ satisfying the non-trapping condition, Robert and Tamura obtained for f a complete asymptotic expansion.Therefore, it is easy to show that the scattering amplitude is changed by a term of order $\mathrm{O}(h^\infty)$ if we modify the potential in the region $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n;\ V(x) > \lambda\}$. Our goal is to prove a similar result in the case where λ is a trapping energy level. Assume that $\mathcal{O}_\lambda \neq \emptyset$ and let F be a closed subset of $\mathcal{O}_\lambda$ and $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ be such that $\psi = 1$ on $\mathbb{R}^n \setminus F$. Let us denote $\widetilde{V}(x) = \psi(x)V(x)$, $\widetilde{P}(h) = -h^2\Delta + \widetilde{V}(x)$ and $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ the scattering amplitude associated to $\widetilde{P}(h)$. We wish to compare $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ with $f(\theta,\omega,\lambda,h)$.

Let $R(z) = (P(h)-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, be the resolvent of $P(h)$ and $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\varepsilon)$. Here we take the limit in the spaces of bounded operators $\mathcal{L}(L^2_\alpha, L^2_{-\alpha})$, $\alpha > \frac{1}{2}$, where $L^2_\alpha = \{f : \langle x\rangle^\alpha f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$. Under the assumption that $(\mathrm{V})_\rho$ is satisfied with $\rho > \frac{n+1}{2}$ and additional hypotheses given in [5], on the growth of $\|R(\lambda+\mathrm{i}0)\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}},\mathrm{L}^2_{\mathrm{comp}}}$, S. Nakamura obtained an exponential decay of the difference $f - \tilde{f}$.

The following theorem compares $\tilde{f}$ and f in the case where we assume only $\rho > 1$.

THEOREM 0.1. – *Assume the following conditions*:
(1) $(\mathrm{V})_\rho$ *with* $\rho > 1$;
(2) *There exist* M *and* $\widetilde{M}$ *such that for any* $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\chi R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\chi\|_{\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2} = \mathrm{O}(h^{-M})$ *and* $\|\chi \widetilde{R}(\lambda \pm \mathrm{i}0)\chi\|_{\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2} = \mathrm{O}(h^{-\tilde{M}})$.

Then for any $(\theta,\omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta=\omega\}$ *we have the following estimate*
$$\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h) = f(\theta,\omega,\lambda,h) + \mathrm{O}\big(h^\infty\big).$$

As we mentioned above, Robert and Tamura obtained an asymptotics for f in the non-trapping case. If we make additional assumptions, it is possible to prove a similar asymptotics in the trapping case. More precisely, given $z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, we know that there exists a unique solution $(q_\infty(t,z,\omega), p_\infty(t,z,\omega))$ of the Hamiltonian system (1) satisfying condition (2). We will replace the non-trapping condition by the following assumption.

ASSUMPTION (H_ω). – There exists a neighborhood W of ω in S^{n-1} such that
$$\forall \omega' \in W,\ \forall z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \lim_{t\to+\infty} \big|q_\infty(t,z,\omega')\big| = \infty.$$

We will also need an assumption of regularity on the incoming and outgoing rays. If we assume (H_ω), then there exists $\xi_\infty(z) \in S^{n-1}$ and $r_\infty(z) \in \mathbb{R}^n$ such that (3) is satisfied. We say that $\theta \in S^{n-1}$ is regular with respect to ω, if $\theta \neq \omega$ and $\forall z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp$, $\xi_\infty(z,\lambda) = \theta \Rightarrow \hat{\sigma}(z) := |\det(\xi_\infty, \partial_{z_1}\xi_\infty, \ldots, \partial_{z_{n-1}}\xi_\infty)| \neq 0$.

THEOREM 0.2. – *Let* $\omega \in S^{n-1}$, *and* $\lambda > 0$. *Assume the following conditions*:
(1) $(\mathrm{V})_\rho$ *with* $\rho > 1$;
(2) *There exists* $R > 0$ *such that the potential* V *extends holomorphically to a conic neighborhood* $\mathcal{C}$ *of* $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ *in* $\mathbb{C}^n$ *and* $\exists \beta > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathcal{C}$, $|V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}$;
(3) (H_ω) *is satisfied and* θ *is regular with respect to* ω;
(4) *There exists* $\varepsilon > 0$ *such that the resonances* λ_j *of* $P(h)$ *satisfy* $|\mathrm{Im}(\lambda_j)| \geqslant Ch^q$ *for* $\mathrm{Re}(\lambda_j) \in [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$.

Pour citer cet article : L. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 655–660

Then we have the following asymptotics

$$f(\theta,\omega,\lambda,h)=\sum_{j=1}^{l}\hat{\sigma}\left(z^j\right)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}S_j-\mathrm{i}\mu_j\frac{\pi}{2}}+\mathrm{O}(h),$$

where z_j, S_j and μ_j are defined in [6]. (*See also Theorem* 1.2 *below.*)

---

1. Introduction

Dans cette Note, nous considérons l'opérateur de Schrödinger semiclassique $P(h)=-h^2\Delta+V(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $0<h<1$. Nous supposons que le potentiel V satisfait l'hypothèse suivante

HYPOTHÈSE $(\mathrm{V})_\rho$. – V est une fonction réelle C^∞ telle que

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \left|\partial_x^\alpha V(x)\right|\leqslant C_\alpha\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}(\rho+|\alpha|)},\quad \rho>1.$$

L'opérateur $P(h)$ avec domaine $D(P(h))=\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^n)$ est auto-adjoint sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, on peut construire l'amplitude de diffusion $f(\theta,\omega,\lambda,h)$, associée aux opérateurs $P(h)$ et $P_0(h)=-h^2\Delta$, qui est régulière par rapport à $(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{\theta=\omega\}$. Robert et Tamura ont étudié dans [6], le comportement asymptotique de f quand $h\to 0$ pour ω, θ et λ fixés, dans le cas où l'énergie λ est non-captive. Plus précisément, notons $(q(t,y,\eta),p(t,y,\eta))$ la solution du système Hamiltonien

$$\begin{cases}\dot{q}=p,\\ \dot{p}=-\nabla_x V(q),\end{cases}\tag{1}$$

avec données initiales (y,η) en $t=0$ et rappelons la condition de non-capture

(NC) : On dit qu'une énergie λ est non-captive pour le symbole $\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$ si pour tout $R>0$ assez grand il existe $T=T(R)$ tel que $|q(t,x,\xi)|>R$ pour $|t|>T$ quand $|x|<R$ et $\lambda=\frac{1}{2}|\xi|^2+V(x)$.

Pour $\omega\neq\theta$ fixés dans S^{n-1} et λ fixée de telle façon que la condition (NC) soit satisfaite, Robert et Tamura ont obtenu un développement asymptotique de f. En utilisant ce développement, on peut montrer très facilement qu'une modification du potentiel $V(x)$ dans la région $\mathcal{O}_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n;\ V(x)>\lambda\}$, entraîne une perturbation de l'amplitude de diffusion $f(\theta,\omega,\lambda,h)$ d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$. Notre but est d'étendre ce résultat au cas où λ est un niveau d'énergie captif. Plus précisément, soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $\mathcal{O}_\lambda$ et $\psi\in\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi=1$ sur $\mathbb{R}^n\setminus F$. Posons $\widetilde{V}(x)=\psi(x)V(x)$, $\widetilde{P}(h)=-h^2\Delta+\widetilde{V}(x)$ et notons $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ l'amplitude de diffusion associée à $\widetilde{P}(h)$. Notre travail consiste à comparer $\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)$ et $f(\theta,\omega,\lambda,h)$.

Dans toute la suite, nous noterons $R(z)=(P(h)-z)^{-1}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, la résolvante de $P(h)$ (resp. $\widetilde{R}(z)$ la résolvante de $\widetilde{P}(h)$) et $R(\lambda\pm\mathrm{i}0)=\lim_{\varepsilon\to0,\varepsilon>0}R(\lambda\pm\mathrm{i}\varepsilon)$ (resp. $\widetilde{R}(\lambda\pm\mathrm{i}0)=\cdots$). Ici, on prend la limite dans l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(L^2_\alpha,L^2_{-\alpha})$, $\alpha>\frac{1}{2}$, où $L^2_\alpha=\{f:\langle x\rangle^\alpha f\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$. Sous une hypothèse de très courte portée ($(\mathrm{V})_\rho$ est satisfaite avec $\rho>\frac{n+1}{2}$) et en supposant de plus que $\|R(\lambda+\mathrm{i}0)\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}},\mathrm{L}^2_{\mathrm{comp}}}$ et $\|\widetilde{R}(\lambda+\mathrm{i}0)\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}},\mathrm{L}^2_{\mathrm{comp}}}$ ont une croissance polynômial par rapport à h^{-1}, Nakamura a établi dans [5] une décroissance exponentielle de la différence $f-\tilde{f}$. En notant $d_\lambda(\cdot,\cdot)$ la pseudo-distance associée à la métrique d'Agmon $\mathrm{d}s^2=\max(V(x)-\lambda,0)\,\mathrm{d}x^2$, il a prouvé l'estimation suivante :

$$\left|f(\theta,\omega,\lambda,h)-\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h)\right|\leqslant C\exp\left(-2\left(d_\lambda(\partial\mathcal{O},F)-\varepsilon\right)/h\right),$$

pour tout $\varepsilon>0$ assez petit. Le théorème suivant étudie la différence $f-\tilde{f}$ dans le cas où l'on suppose seulement $\rho>1$.

THÉORÈME 1.1. – *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites* :

(1) $(\mathrm{V})_\rho$ *avec* $\rho > 1$;
(2) *Il existe des constantes* M *et* $\widetilde{M}$ *telles que pour tout* $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\chi R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\chi\|_{\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2} = \mathcal{O}_\chi(h^{-M})$ *et* $\|\chi \widetilde{R}(\lambda \pm \mathrm{i}0)\chi\|_{\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2} = \mathcal{O}_\chi(h^{-\tilde{M}})$.

Alors, pour tout $(\theta,\omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \setminus \{\theta = \omega\}$, *nous avons l'estimation suivante*

$$\tilde{f}(\theta,\omega,\lambda,h) = f(\theta,\omega,\lambda,h) + \mathrm{O}\big(h^\infty\big).$$

Afin d'étendre le résultat de Robert et Tamura au cas captif, on introduit des hypothèses supplémentaires. Etant donné $z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, il existe une unique solution $(q_\infty(t,z,\omega), p_\infty(t,z,\omega))$, de (1) telle que

$$\lim_{t\to-\infty} \big|p_\infty(t,z,\omega) - \sqrt{2\lambda}\omega\big| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} \big|q_\infty(t,z,\omega) - \sqrt{2\lambda}\omega t - z\big| = 0. \tag{2}$$

HYPOTHÈSE (H_ω). – Il existe un voisinage W de ω dans S^{n-1} tel que

$$\forall \omega' \in W,\ \forall z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \lim_{t\to+\infty} \big|q_\infty(t,z,\omega')\big| = +\infty.$$

Si (H_ω) est satisfaite, alors il existe $\xi_\infty(z) \in S^{n-1}$ et $r_\infty(z) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\lim_{t\to+\infty} \big|p_\infty(t,z,\omega) - \sqrt{2\lambda}\xi_\infty(z)\big| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \big|q_\infty(t,z,\omega) - \sqrt{2\lambda}\xi_\infty(z)t - r_\infty(z)\big| = 0. \tag{3}$$

Nous dirons que $\theta \in S^{n-1}$ *est régulier par rapport à* ω, si $\theta \neq \omega$ et $\forall z \in (\mathbb{R}\omega)^\perp$, $\xi_\infty(z,\lambda) = \theta \Rightarrow \hat{\sigma}(z) := |\det(\xi_\infty, \partial_{z_1}\xi_\infty, \ldots, \partial_{z_n}\xi_\infty)| \neq 0$. Nous avons alors le théorème suivant

THÉORÈME 1.2. – *Soient* $\omega \in S^{n-1}$ *et* $\lambda > 0$. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites* :
(1) $(\mathrm{V})_\rho$ *avec* $\rho > 1$.
(2) *Il existe* $R > 0$ *tel que le potentiel* V *se prolonge analytiquement à un voisinage conique* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *et* $\exists \beta > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathcal{C}, |V(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}$.
(3) (H_ω) *est vérifiée et* θ *est régulier par rapport à* ω.
(4) *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que les résonances* λ_j *de l'opérateur* $P(h)$, *satisfont* $|\mathrm{Im}(\lambda_j)| \geqslant Ch^q$ *pour* $\mathrm{Re}(\lambda_j) \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$.

Alors, nous avons l'asymptotique suivante

$$f(\theta,\omega,\lambda,h) = \sum_{j=1}^{l} \hat{\sigma}\left(z^j\right)^{-1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}S_j - i\mu_j\pi/2} + \mathrm{O}(h),$$

où

$$S_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\big|p_\infty\big(t,z^j,\omega\big)\big|^2 - V\left(q_\infty\big(t,z^j,\omega\big)\right) - \lambda\right) \mathrm{d}t - \big\langle r_\infty\big(z^j\big), \sqrt{2\lambda}\theta\big\rangle,$$

$\mu_j \in \mathbb{Z}$ *est l'indice de Maslov de la trajectoire* $(q_\infty(t,z^j,\omega), p_\infty(t,z^j,\omega))$ *sur la variété Lagrangienne* $\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = q_\infty(t,z,\omega),\ \xi = p_\infty(t,z,\omega),\ z \in \Lambda_\omega,\ t \in \mathbb{R}\}$ *et les* $(z_j)_{j=1,\ldots,l}$ *sont les solutions de* $\xi_\infty(z) = \theta$.

Remarque 1. – L'hypothèse (2) sert à définir les résonances de $P(h)$ par la méthode de complex scaling et permet d'utiliser le principe du maximum semiclassique de Tang et Zworski [7]. Ainsi, l'hypothèse (4) fournit une estimation de la résolvante du type $\mathcal{O}(h^{-M})$. Les hypothèses énoncées dans (3) sont nécessaires afin d'analyser le comportement semiclassique du propagateur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}tP(h)}$ et pour appliquer la méthode de la phase stationnaire. Remarquons aussi, que l'hypothèse (H_ω) est plus faible que (NC), puisque nous ne demandons pas que toutes les particules classiques s'échappent.

2. Esquisse de démonstration du Théorème 1.1

La démonstration du Théorème 1.1 repose sur la formule de représentation de Isozaki et Kitada. D'après cette formule on peut construire des symboles k_{+a}, $k_{\pm b}$ et des phases $\phi_\pm$ tels que la différence entre f et

$\tilde{f}$ s'écrit

$$f - \tilde{f} = \big\langle \big(R(\lambda + \mathrm{i}0) - \widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\big)\big(k_{+b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_+} + k_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_-}\big), k_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_+}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \mathrm{O}\big(h^\infty\big).$$

La première étape de la démonstration consiste en une localisation spatiale. Pour cela nous utilisons de manière essentielle un résultat récent de Burq [2]. Nous pouvons alors écrire sans utiliser les hypothèses de décroissance des résolvantes

$$(f - \tilde{f})(\theta, \omega, \lambda, h) = \big\langle \big(R(\lambda + \mathrm{i}0) - \widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\big) g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_-}, g_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_+}\big\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \mathrm{O}\big(h^\infty\big). \tag{4}$$

Ici, g_{-b} et g_{+a} sont des symboles supportés dans des couronnes centrées sur l'origine $\mathcal{C}_b(0, 10R_0, 10R_0 + 1)$ et $\mathcal{C}_a(0, 20R_0, 20R_0 + 1)$ où $R_0 >$ est assez grand et vérifie en particulier $\mathcal{O} \subset B(0, R_0)$.

On se donne maintenant deux fermés G et H tels que $F \Subset G \Subset H \Subset \mathcal{O}$ et des fonctions $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $1_F \prec \chi_1 \prec 1_G \prec \chi_2 \prec 1_H$. Ici $\chi_1 \prec \chi_2$ signifie que $\chi_2 = 1$ sur le support de χ_1. Par construction, $\widetilde{P}(h)(1 - \chi_i) = P(h)(1 - \chi_i)$, $i = 1, 2$, et en travaillant comme dans [1], on obtient

$$\widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)(1 - \chi_2) = (1 - \chi_1)R(\lambda + \mathrm{i}0)(1 - \chi_2) + \widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)\big[P_0(h), \chi_1\big]R(\lambda + \mathrm{i}0)(1 - \chi_2). \tag{5}$$

Compte tenu des supports de g_{-b} et g_{+a}, nous savons que $(1 - \chi_2)g_{-b} = g_{-b}$ et $(1 - \chi_1)g_{+a} = g_{+a}$, de sorte que les équations (4) et (5) donnent

$$(\tilde{f} - f)(\theta, \omega, \lambda, h) = \big\langle R(\lambda + \mathrm{i}0)\psi_1\big[P_0(h), \chi_1\big]\psi_1\widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_-}, g_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_+}\big\rangle + \mathrm{O}\big(h^\infty\big), \tag{6}$$

où $\psi_1 \in \mathrm{C}_0^\infty(\{|x| < 5R_0\})$ satisfait $1_{\{|x|<4R_0\}} \prec \psi_1$.

Posons $\widetilde{\mathcal{V}}_0 = \widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_-}$. Afin d'étudier la dépendance en h de $\widetilde{\mathcal{V}}_0$, on utilise la notion de front d'onde semiclassique, WF^{sc} introduite par Gérard dans [3]. Signalons que cette notion similaire à la notion de front d'onde habituelle, permet de contrôler la décroissance en h en plus de la régularité et que les propriétés élémentaires restent vraies. En particulier on utilise un analogue semiclassique de l'implication

$$P(x, D_x)u = f \Longrightarrow WF(u) \subset WF(f) \cup \mathrm{Char}(P)$$

et des inclusions $WF(u) \subset T^*(\mathrm{supp}(u)), \mathrm{Char}(P) \subset T^*(\mathrm{supp}(P))$. On renvoie à [3] et [4] pour plus de détails. Un calcul immédiat donne

$$\big(\widetilde{P}(h) - \lambda\big)\psi_1\widetilde{\mathcal{V}}_0 = \psi_1 g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_-} + \big[\widetilde{P}(h), \psi_1\big]\widetilde{\mathcal{V}}_0.$$

Par construction $\psi_1 g_{-b} = 0$, donc $(\widetilde{P}(h) - \lambda)\psi_1\widetilde{\mathcal{V}}_0 = [P_0(h), \psi_1]\widetilde{\mathcal{V}}_0$ et nous déduisons de la remarque précédente que

$$WF^{\mathrm{sc}}(\psi_1\widetilde{\mathcal{V}}_0) \subset WF^{\mathrm{sc}}\big(\big[P_0(h), \psi_1\big]\widetilde{\mathcal{V}}_0\big) \cup \mathrm{Char}^{\mathrm{sc}}\,\big(\widetilde{P}(h) - \lambda\big).$$

En utilisant une nouvelle fois les propriétés élémentaires du front d'onde semi-classique, nous obtenons

$$WF^{\mathrm{sc}}\big(\psi_1\widetilde{\mathcal{V}}_0\big) \subset \widehat{T}^*\big(\mathrm{supp}\big(\big[P_0(h), \psi_1\big]\big)\big) \cup \mathrm{Char}^{\mathrm{sc}}\big(\widetilde{P}(h) - \lambda\big).$$

Par construction, on sait que $\mathrm{supp}([P_0(h), \psi_1]) \subset \{4R_0 < |x| < 5R_0\}$ et $\mathrm{Char}^{\mathrm{sc}}(\widetilde{P}(h)) \subset \widehat{T}^*(\mathcal{O}^c \cup F)$. Nous en déduisons,

$$WF^{\mathrm{sc}}\big(\psi_1\widetilde{\mathcal{V}}_0\big) \subset \widehat{T}^*\big(\mathcal{O}^c \cup F\big).$$

De plus, $\mathrm{supp}([P_0(h), \chi_1]) \subset G \setminus F$, donc $\mathrm{supp}([P_0(h), \chi_1]) \cap (\mathcal{O}^c \cup F) = \emptyset$ et nous obtenons

$$WF^{\mathrm{sc}}\big(\big[P_0(h), \chi_1\big]\psi_1\widetilde{\mathcal{V}}_0\big) = \emptyset.$$

Par conséquent,

$$\big\|\big[P_0(h), \chi_1\big]\psi_1\widetilde{R}(\lambda + \mathrm{i}0)g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_-}\big\| = \mathrm{O}\big(h^\infty\big). \tag{7}$$

D'autre part, nous déduisons de l'hypothèse (2) du Théorème 1.1 que

$$\big\|g_{+a}R(\lambda + \mathrm{i}0)\psi_1\big\| = \mathrm{O}\big(h^{-M}\big). \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) combinées avec (6) achèvent de démontrer le théorème.

3. Esquisse de démonstration du Théorème 1.2

Comme dans le Théorème 1.1, partant de la formule d'Isozaki–Kitada nous montrons que

$$f(\theta,\omega,\lambda,h)=\left\langle R(\lambda+\mathrm{i}0)\left(k_{+b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_+}+k_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_-}\right),k_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_+}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}+\mathrm{O}\left(h^\infty\right)$$

et nous réalisons la même localisation spatiale que dans la démonstration du Théorème 1.1, pour obtenir

$$f(\theta,\omega,\lambda,h)=\left\langle R(\lambda+\mathrm{i}0)g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_-},g_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\phi_+}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}+\mathrm{O}\left(h^\infty\right). \tag{9}$$

Nous utilisons ensuite l'égalité suivante dans l'équation (9),

$$R(\lambda+\mathrm{i}0)=\mathrm{i}h^{-1}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}t\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h^{-1}tP(h)}\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}T\lambda}R(\lambda+\mathrm{i}0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h^{-1}TP(h)}. \tag{10}$$

A l'aide, de l'hypothèse sur la localisation des résonances, des résultats de [1] et du principe du maximum semiclassique [7], on montre qu'il existe $M>0$ tel que $\|R(\lambda+\mathrm{i}0)\|_{\alpha,-\alpha}=\mathcal{O}(h^{-M})$. En combinant cette estimation et un lemme d'Egorov dans des espaces à poids (ici nous utilisons l'hypothèse (H_ω)), nous établissons que pour $T>0$ assez grand, nous avons

$$\left\langle R(\lambda+\mathrm{i}0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h^{-1}TP(h)}g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_-},g_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_+}\right\rangle=\mathrm{O}\left(h^N\right). \tag{11}$$

Des équations (9), (10) et (11), nous déduisons que

$$f(\theta,\omega,\lambda,h)=\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}t\lambda}\left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}th^{-1}P(h)}g_{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_-},g_{+a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\Phi_+}\right\rangle\mathrm{d}t+\mathrm{O}\left(h^N\right).$$

La fin de la démonstration est identique à celle de Robert et Tamura. Nous commençons en donnant une approximation du groupe unitaire $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}th^{-1}P(h)}$, puis nous appliquons la méthode de la phase stationnaire, l'hypothèse (3) traduisant la non-dégénérescense de la phase.

Remerciements. L'auteur tient à remercier V. Petkov pour lui avoir suggéré ce sujet ainsi que pour ses remarques fructueuses. Il tient aussi à remercier V. Bruneau pour leurs discussions.

Références bibliographiques

[1] V. Bruneau, V. Petkov, Semiclassical resolvent estimates for trapping perturbations, Comm. Math. Phys. 213 (2) (2000) 413–432.
[2] N. Burq, Lower bounds for shape resonances width of long range Schrödinger operators, Preprint, University Paris XI, 2000.
[3] C. Gérard, Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes, Mem. Soc. Math. France 31 (1988) 146.
[4] L. Michel, Semi-classical behavior of the scattering amplitude for trapping perturbations at fixed energy, Preprint, University Bordeaux 1, 2001.
[5] S. Nakamura, Scattering theory for the shape resonance model I. Non-resonant energies, Ann. Inst. H. Poincaré 50 (1989) 115–131.
[6] D. Robert, H. Tamura, Asymptotic behavior of scattering amplitudes in semi-classical and low energy limits, Ann. Inst. Fourier 39 (1989) 155–192.
[7] S.H. Tang, M. Zworski, From quasi-modes to resonances, Math. Res. Lett. 5 (1998) 261–272.