C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 625–628

Théorie des nombres/*Number Theory*

Majorations explicites de $|L(1,\chi)|$ (quatrième partie)

Stéphane R. Louboutin

Institut de mathématiques de Luminy, UPR 9016, 163 avenue de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 9, France

Reçu le 17 décembre 2001 ; accepté après révision le 20 février 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé Nous montrons que pour tout caractère de Dirichlet χ pair, primitif et de conducteur $q_\chi > 1$ impair, nous avons $|(1-\frac{\chi(2)}{2})L(1,\chi)| \leqslant \frac{1}{4}(\log q_\chi + \kappa)$ avec $\kappa := 2+\gamma-\log(\pi/4) = 2.81878\ldots$. ***Pour citer cet article : S.R. Louboutin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 625–628.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Explicit upper bounds on $|L(1,\chi)|$ (part four)

Abstract We prove that for any even primitive Dirichlet character χ of odd conductor $q_\chi > 1$ we have $|(1-\frac{\chi(2)}{2})L(1,\chi)| \leqslant \frac{1}{4}(\log q_\chi + \kappa)$, where $\kappa := 2+\gamma-\log(\pi/4) = 2.81878\ldots$. ***To cite this article: S.R. Louboutin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 625–628.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit $S = \{p_i;\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ un ensemble fixé de nombres premiers deux à deux distincts. Dans [2], en utilisant les représentations intégrales des fonctions L, nous avons montré qu'il existe une constante calculable c_S ne dépendant que de S telle que pour tout caractère de Dirichlet χ primitif de conducteur $q_\chi > 1$ nous avons :

$$\left|\left\{\prod_{p\in S}\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\right\}L(1,\chi)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left\{\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}\bigl(\log q_\chi + c_S + \mathrm{o}(1)\bigr),$$

où $\mathrm{o}(1)$ est un terme explicite tendant vers 0 lorsque q_χ tend vers l'infini. Dans [5], en utilisant des bornes sur les sommes de caractères $\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{a}\chi(b)$, nous avons donné dans le cas particulier des caractères pairs une nouvelle démonstration de ce résultat conduisant à de meilleures valeurs pour c_S que celles déduites de la preuve précédente. Maintenant, dans le but d'obtenir dans [6] des bornes aussi faibles que possible sur les discriminants des corps à multiplication complexe quartiques non galoisiens de groupes des classes d'idéaux d'exposants $\leqslant 2$, nous avons besoin dans le cas particulier des caractères pairs d'une constante $c_{\{2\}}$ pour $S=\{2\}$ aussi petite que possible. Les résultats de [2] donnent $c_{\{2\}} = 6+4\log 2 = 8.77258\ldots$, et ceux de [5, Theorem 5] donnent $c_{\{2\}} = 2\gamma - 1 + 6\log 2 = 4.31331\ldots$ (où $\gamma = 0.577\ldots$ désigne la constante d'Euler). L'objet de cette Note est d'améliorer notablement ces résultats. Nous prouvons :

Adresse e-mail : louboutimrs@iml.univ-mrs.fr (S.R. Louboutin).

S1631-073X(02)02333-6/FLA

THÉORÈME 1.1. – *Posons* $\kappa := 2 + \gamma - \log(\pi/4) = 2.81878\ldots$, *où* $\gamma = 0.57721\ldots$ *désigne la constante d'Euler. Soit* χ *un caractère de Dirichlet pair, primitif de conducteur* $q_\chi > 1$ *impair. Alors*

$$\left|\left(1-\frac{\chi(2)}{2}\right)L(1,\chi)\right| \leqslant \frac{1}{4}(\log q_\chi + \kappa).$$

La preuve de ce résultat repose à nouveau, comme dans [2] et [3], sur les représentations des fonctions L comme intégrales de fonctions θ, sauf qu'ici nous aurons affaire à des caractères de Dirichlet ψ (induits par χ) non primitifs dont les fonctions θ associées ne satisfont pas d'équations fonctionnelles simples. Cela compliquera l'utilisation de la méthode utilisée dans [3].

En utilisant les résultats complémentaires de [7] (*voir* également [3] et [4]), il en résulte :

COROLLAIRE 1.2. – *Posons* $\kappa_1 := 0$, $\kappa_2 := 2\log 2 = 1.38629\ldots$ *et* $\kappa_3 := 2 + \gamma - \log(\pi/4) = 2.81878\ldots$. *Soit* χ *un caractère de Dirichlet quadratique, pair, primitif et de conducteur* $q_\chi > 1$. *Alors,*

$$L(1,\chi) \leqslant \begin{cases} (\log q_\chi + \kappa_1)/2 & \textit{si } \chi(2) = +1, \\ (\log q_\chi + \kappa_2)/4 & \textit{si } \chi(2) = 0, \\ (\log q_\chi + \kappa_3)/6 & \textit{si } \chi(2) = -1. \end{cases}$$

De tels majorants pour $|L(1,\chi)|$ dépendant du comportement en $p = 2$ du caractère considéré sont par exemple utilisés dans [1] et [8] (*voir* toutefois [5, Section 4.4.1] où est signalé que, si les bornes de [8] sont correctes, leur preuve ne l'est pas). Toutefois, la principale application de notre théorème sera développée dans [6] : il s'agit d'obtenir une borne raisonnable sur les discriminants des corps à multiplication complexe quartiques non galoisiens dont les groupes des classes d'idéaux sont d'exposant $\leqslant 2$.

2. Preuve du Théorème 1.1

Dans toute la suite, χ est un caractère de Dirichlet pair, primitif de conducteur $q_\chi > 1$ impair et ψ est le caractère de Dirichlet pair, non primitif modulo $q_\psi = 2q_\chi$ induit par χ (on a donc $\psi(n) = 0$ lorsque n est pair). Puisque

$$\left(1-\frac{\chi(2)}{2^s}\right)L(s,\chi) = \sum_{n\geqslant 1}\psi(n)n^{-s} \quad (\Re(s) > 0),$$

nous avons :

$$\left(1-\frac{\chi(2)}{2^s}\right)\left(\frac{q_\psi}{\pi}\right)^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi) = \int_0^\infty \theta(x,\psi)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (\Re(s) > 1),$$

où

$$\theta(x,\psi) = \sum_{n\geqslant 1}\psi(n)\,\mathrm{e}^{-\pi n^2 x/q_\psi} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi(n)\,\mathrm{e}^{-\pi n^2 x/q_\psi} \quad (x > 0) \tag{1}$$

(par parité de ψ). En coupant l'intégrale $\int_0^\infty$ en $\int_0^a + \int_a^\infty$ avec $a > 0$ à choisir plus tard, et en effectuant le changement de variable $x \mapsto 1/x$ dans l'intégrale $\int_0^a$, nous obtenons (pour $\Re(s) > 1$) :

$$\left(1-\frac{\chi(2)}{2^s}\right)\left(\frac{q_\psi}{\pi}\right)^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi) = \int_{1/a}^\infty \theta\left(\frac{1}{x},\psi\right)x^{-s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_a^\infty \theta(x,\psi)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

D'après (3), (4) et le Lemme 2.2 ci-dessous, cette dernière représentation intégrale est valable dans tout le plan complexe et, pour $s = 1$, nous obtenons :

$$\left|\left(1-\frac{\chi(2)}{2}\right)L(1,\chi)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{q_\psi}}\int_{1/a}^\infty \left|\theta\left(\frac{1}{x},\psi\right)\right|\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{q_\psi}}\int_a^\infty |\theta(x,\psi)|\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \tag{2}$$

Posons

$$g(x) = \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x} \quad (x > 0). \tag{3}$$

Alors,

$$\bigl|\theta(x,\psi)\bigr| \leqslant \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n \text{ impair}}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x/q_\psi} = g\left(\frac{x}{q_\psi}\right) - g\left(\frac{4x}{q_\psi}\right). \tag{4}$$

Si ψ était primitif on aurait $\theta(1/x,\psi) = W(\psi)\sqrt{x}\theta(x,\bar\psi)$ avec $|W(\psi)| = 1$, et (4) permettrait de majorer $|\theta(1/x,\psi)|$. Malheureusement, ψ n'étant pas primitif nous devons procéder autrement.

LEMME 2.1. – *Posons*

$$\tau_b(\chi) := \sum_{a=1}^{q_\chi} \chi(a)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}ab/q_\chi},$$

qui vérifie donc $\tau_b(\chi) = \bar\chi(b)\tau_1(\chi)$ *et* $|\tau_1(\chi)| = \sqrt{q_\chi}$ *(par primitivité de* χ*). Pour* $b \in \mathbf{Z}$ *nous avons*

$$\tau_b(\psi) := \sum_{a=1}^{q_\psi} \psi(a)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}ab/q_\psi} = (-1)^b\bar\chi(b)\chi(2)\tau_1(\chi).$$

D'où $|\tau_b(\psi)| \leqslant \sqrt{q_\chi} = \sqrt{q_\psi/2}$.

Démonstration. – Par q_ψ-périodicité de $a \mapsto \psi(a)\exp(2\pi\,\mathrm{i}ab/q_\psi)$, on a

$$\tau_b(\psi) = \sum_{a=1}^{2q_\chi} \psi(a+q_\chi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}(a+q_\chi)b/2q_\chi} = (-1)^b \sum_{a=1}^{2q_\chi} \psi(a+q_\chi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}ab/2q_\chi}.$$

Puisque $\psi(a+q_\chi) = 0$ lorsque a est impair (car $a+q_\chi$ est alors pair) et puisque $\psi(a+q_\chi) = \chi(a)$ lorsque $a = 2A$ est pair (car ψ est induit par χ), nous avons :

$$\tau_b(\psi) = (-1)^b \sum_{A=1}^{q_\chi} \chi(2A)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}Ab/q_\chi} = (-1)^b\chi(2)\tau_b(\chi) = (-1)^b\chi(2)\bar\chi(b)\tau_1(\chi)$$

(cette dernière égalité résultant de ce que χ est primitif). □

LEMME 2.2. – *Nous avons* $|\theta(1/x,\psi)| \leqslant \sqrt{x/2}\,g(x/q_\psi)$.

Démonstration. – Posons

$$g(x,a,q) = \sum_{b\in\mathbf{Z}} \mathrm{e}^{-\pi(a+bq)^2 x/q} \quad (x > 0).$$

La formule de Poisson donne

$$g(x,a,q) = \frac{1}{\sqrt{qx}} \sum_{b\in\mathbf{Z}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}ab/q}\,\mathrm{e}^{-\pi b^2/qx}.$$

D'où (d'après (1) et le Lemme 2.1) :

$$\begin{aligned}2\theta(x,\psi) &= \sum_{a=1}^{q_\psi}\sum_{b\in\mathbf{Z}} \psi(a+bq_\psi)\,\mathrm{e}^{-\pi(a+bq_\psi)^2 x/q_\psi} = \sum_{a=1}^{q_\psi} \psi(a) g(x,a,q_\psi) = \frac{1}{\sqrt{q_\psi x}} \sum_{b\in\mathbf{Z}} \tau_b(\psi)\,\mathrm{e}^{-\pi b^2/q_\psi x}\\ &= \frac{\chi(2)\tau(\chi)}{\sqrt{q_\psi x}} \sum_{b\in\mathbf{Z}} (-1)^b\bar\chi(b)\,\mathrm{e}^{-\pi b^2/q_\psi x} = 2\frac{\chi(2)\tau(\chi)}{\sqrt{q_\psi x}} \sum_{b\geqslant 1} (-1)^b\bar\chi(b)\,\mathrm{e}^{-\pi b^2/q_\psi x}\end{aligned}$$

(par parité de χ), qui donne le résultat (en changeant x en $1/x$). □

En utilisant (2), (4), ce dernier Lemme 2.2 et l'équation fonctionnelle

$$g(1/x) = \sqrt{x}\,g(x) + (\sqrt{x} - 1)/2 \quad (x > 0),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left|\left(1 - \frac{\chi(2)}{2}\right)L(1,\chi)\right| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2q_\psi}}\int_{1/a}^{\infty} g\left(\frac{x}{q_\psi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{\sqrt{q_\psi}}\int_a^\infty g\left(\frac{x}{q_\psi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{q_\psi}}\int_a^\infty g\left(\frac{4x}{q_\psi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2q_\psi}}\int_{1/aq_\psi}^{\infty} g(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{a/q_\psi}^{\infty} g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int_{4a/q_\psi}^{\infty} g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2q_\psi}}\left(\int_1^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^{aq_\psi} g\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) + \left(\int_1^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \int_1^{q_\psi/a} g\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\int_1^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \int_1^{q_\psi/4a} g\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{4q_\psi}{a}\right) + \sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{1}{2}L - \frac{1}{2} - R,
\end{aligned}$$

où

$$L := \int_1^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2 + \gamma - \log(4\pi)}{2}$$

(*voir* [3, (3) et lemme p. 12]) et où

$$R = \frac{1}{\sqrt{2q_\psi}}\left(\frac{1}{2}\log(aq_\psi) + 1 - L + \int_{aq_\psi}^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right) + \int_{q_\psi/a}^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int_{q_\psi/4a}^\infty g(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

tend vers 0 lorsque $q_\psi = 2q_\chi$ tend vers l'infini. Pour minimiser le terme prépondérant $\frac{1}{4}\log(4q_\psi/a) + \sqrt{a/2} + \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}$ nous choisissons $a = 1/2$, ce terme prépondérant valant alors $(\log(16q_\chi) + 2 + \gamma - \log(4\pi))/4 = (\log q_\chi + \kappa)/4$. Il ne reste donc plus qu'à voir que $R \geqslant 0$, ce qui résulte de ce que pour $a = 1/2$ nous avons $aq_\psi = q_\psi/4a = q_\chi$ et (remarquer que $q_\chi \geqslant 5$) :

$$\begin{aligned}
R &\geqslant \frac{1}{\sqrt{4q_\chi}}\left(\frac{1}{2}\log q_\chi + 1 - L\right) - \frac{1}{2q_\chi}\int_{q_\chi}^\infty g(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{4q_\chi}}\left(\frac{1}{2}\log q_\chi + 1 - L\right) - \frac{1}{2\pi q_\chi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-\pi n^2 q_\chi} > 0.
\end{aligned}$$

Références bibliographiques

[1] M. Le, Upper bounds for class numbers of real quadratic fields, Acta Arith. 68 (1994) 141–144.
[2] S. Louboutin, Majoration au point 1 des fonctions L associées aux caractères de Dirichlet primitifs, ou au caractère d'une extension quadratique d'un corps quadratique imaginaire principal, J. Reine Angew. Math. 419 (1991) 213–219.
[3] S. Louboutin, Majorations explicites de $|L(1,\chi)|$, C. R. Acad. Sci. Paris 316 (1993) 11–14.
[4] S. Louboutin, Majorations explicites de $|L(1,\chi)|$ (troisième partie), C. R. Acad. Sci. Paris 332 (2001) 95–98.
[5] S. Louboutin, Explicit upper bounds for $|L(1,\chi)|$ for primitive even Dirichlet characters, Acta Arith. 101 (2002) 1–18.
[6] S. Louboutin, Explicit lower bounds for residues at $s = 1$ of Dedekind zeta functions and relative class numbers of CM-fields, Preprint, submitted.
[7] O. Ramaré, Approximate formulae for $L(1,\chi)$, Acta Arith. 100 (2001) 245–256.
[8] R.G. Stanton, C. Sudler, H.C. Williams, An upper bound for the period of the simple continued fraction for $\sqrt{D}$, Pacific J. Math. 67 (1976) 525–536.