C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 635–638

Analyse complexe/*Complex Analysis*

L'invariant de Calabi pour les homéomorphismes quasiconformes du disque

Peter Haïssinsky

CMI/LATP, Université de Provence, 39, rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

Reçu le 11 février 2002 ; accepté le 19 février 2002

Note présentée par Etienne Ghys.

Résumé On montre que l'invariant de Calabi des difféomorphisms symplectiques à support compact dans le disque unité est bien défini pour les homéomorphismes quasiconformes et qu'il dépend continûment de ces homéomorphismes dans la topologie quasiconforme. ***Pour citer cet article : P. Haïssinsky, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 635–638.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The Calabi invariant for quasiconformal mappings of the unit disk

Abstract We prove that the Calabi invariant for the symplectic diffeomorphisms of the unit disk with compact support is well defined for quasiconformal maps and depends continuously with respect to these homeomorphisms in the quasiconformal topology. ***To cite this article: P. Haïssinsky, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 635–638.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

E. Calabi [3] définit plusieurs invariants associés aux difféomorphisms symplectiques dont un seul est non trivial en dimension 2. Il s'agit d'un homomorphisme du groupe des difféomorphismes symplectiques du disque unité $\mathbb{D}$ à support compact (i.e. qui vaut l'identité près du bord) dans $\mathbb{R}$. Cet invariant montre que ce groupe est algébriquement non simple. A. Fathi [4] d'une part et J.M. Gambaudo et E. Ghys [5] d'autre part en donnent une interprétation géométrique que nous rappelons ci-dessous. Ces derniers montrent notamment que ce morphisme est invariant par conjugaison topologique, mais qu'il n'est pas continu dans la topologie $\mathcal{C}^0$. Ils posent aussi la question de savoir si cet invariant est bien défini pour les homéomorphismes du disque à support compact. Dans cette Note, on montre que cet invariant est bien défini pour la classe intermédiaire des homéomorphismes quasiconformes du disque qui fixe le bord, et qu'il est continu dans la topologie quasiconforme. Ce résultat montre que cette classe est naturelle pour cet invariant.

DÉFINITION. – Etant donnée une constante $K \geqslant 1$, un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui préserve l'orientation est *K-quasiconforme* si φ appartient au premier espace de Sobolev $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ et si, pour presque tout $x \in \mathbb{C}$, on a $|D_x f|^2 \leqslant K \cdot \mathrm{Jac}_x f$. On dit que φ est quasiconforme s'il est K-quasiconforme pour un certain $K \geqslant 1$. Une suite (φ_n) d'homéomorphismes quasiconformes tend vers φ dans la topologie quasiconforme s'il existe une constante $K < \infty$ telle que φ_n soit K-quasiconforme pour tout n, et si φ est la limite uniforme de (φ_n) sur tout compact. L'ensemble QC_0 des homéomorphismes quasiconformes

Adresse e-mail : phaissin@cmi.univ-mrs.fr (P. Haïssinsky).

S1631-073X(02)02334-8/FLA

du disque unité dans lui-même qui fixent le cercle unité ponctuellement forme un groupe σ-compact qui contient strictement les difféomorphisms du disque qui fixent le cercle unité ponctuellement. On notera QC_0^K le sous-ensemble compact des homéomorphismes K-quasiconformes. Nous invitons le lecteur à se reporter à l'ouvrage [1] pour la justification de ces affirmations ainsi que pour des compléments.

Rappelons la définition géométrique de l'invariant de Calabi [5]. Soit φ un homéomorphisme du disque qui fixe le bord ponctuellement. On considère une isotopie $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ de l'identité à φ, et, pour $x \neq y$, on note $\mathrm{Ang}_\varphi(x, y)$ le nombre de tours algébrique que fait le vecteur $v_t = \varphi_t(y) - \varphi_t(x)$ lorsque t varie de 0 à 1. Ce nombre est indépendant de l'isotopie car ce groupe d'homéomorphismes est contractile. Lorsque φ est un difféomorphisme, cette fonction est bornée sur $\mathbb{D}^2 \setminus \{(x, x),\ x \in \mathbb{D}\}$. A. Fathi, ainsi que J.-M. Gambaudo et E. Ghys, montre que l'invariant de Calabi d'un difféomorphisme φ qui vaut l'identité près du bord et qui préserve la forme d'aire est

$$C(\varphi) = \int_{\mathbb{D}^2} \mathrm{Ang}_\varphi(x, y)\, |\mathrm{d}x|^2 \cdot |\mathrm{d}y|^2.$$

Cet invariant mesure donc le nombre moyen de tours que font les points les uns par rapport aux autres.

Comme les homéomorphismes quasiconformes sont absolument continus [1], la même démonstration que dans le cas des difféomorphismes montre que si $\mathrm{Ang}_\varphi(x, y)$ est intégrable, alors $C : QC_0(\mathit{Aire}) \to \mathbb{R}$ est un homomorphisme de groupe, où $QC_0(\mathit{Aire})$ désigne le sous-groupe des homéomorphismes de QC_0 qui laissent l'aire invariante.

Le résultat principal de cette Note est donc

THÉORÈME. – *Pour tout $K \geqslant 1$,*

(a) *il existe une constante $C_K < \infty$ telle que, si $\varphi \in QC_0^K$ alors*

$$\int_{\mathbb{D}^2} \left|\mathrm{Ang}_\varphi(x, y)\right| |\mathrm{d}x|^2 \cdot |\mathrm{d}y|^2 \leqslant C_K\ ;$$

(b) *l'application $\varphi \mapsto C(\varphi)$ est continue lorsque φ parcourt QC_0^K.*

COROLLAIRE. – *L'invariant de Calabi se prolonge naturellement à $QC_0(\mathit{Aire})$. L'application $\widetilde{C}$: $[1, \infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\widetilde{C}(K) = \sup\{|C(\varphi)|,\ \varphi \in QC_0^K\}$ est un homéomorphisme.*

Ces résultats découlent de la proposition suivante.

PROPOSITION. – *Pour tout $K \geqslant 1$, il existe une constante $C = C(K)$ telle que, pour tout $\varphi \in QC_0^K$, on ait, pour $x \neq y$,*

$$\left|\mathrm{Ang}_\varphi(x, y)\right| \leqslant C\left[1 + \log\left(1 + \frac{1}{d_h(x, y)}\right)\right],$$

où $d_h(x, y)$ désigne la distance hyperbolique de x à y dans $\mathbb{D}$.

Rappelons que la métrique hyperbolique de $\mathbb{D}$ est une métrique riemannienne complète qui rend les automorphismes du disque des isométries et dont les géodésiques sont les cercles de la sphère de Riemann qui coupent le cercle unité orthogonalement (*cf.* [2]).

Commençons par un lemme. Pour $x \in \mathbb{D}$, on note $A_x : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorphisme tel que $A_x(0) = x$. On désigne par $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur et par $E_x : \mathbb{H} \to \mathbb{D} \setminus \{x\}$ le revêtement universel de $\mathbb{D} \setminus \{x\}$ défini par $E_x(z) = A_x \circ \exp 2i\pi z$. Il relève les demi-géodésiques issues de x en des demi-droites verticales.

On considère $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ le relevé de $\varphi : \mathbb{D} \setminus \{x\} \to \mathbb{D} \setminus \{\varphi(x)\}$ tel que $\phi(0) = 0$ et $E_{\varphi(x)} \circ \phi = \varphi \circ E_x$; on a donc $\phi(z + 1) = \phi(z) + 1$ pour $z \in \mathbb{H}$.

LEMME. – *Soient $x \neq y \in \mathbb{D}$. On note z un relevé de y et $\hat{z}$ le projeté orthogonal de z sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\left|\mathrm{Ang}_\varphi(x, y)\right| \leqslant 2 + \left|\mathrm{Re}\,\phi(z) - \mathrm{Re}\,\phi(\hat{z})\right|.$$

Démonstration. – Soit (φ_t) une isotopie de l'identité à φ. A $s > 0$ fixé, on note ω_s l'homéomorphisme de $\mathbb{D}$ qui fixe x et qui consiste à pousser tout autre point y' de x d'un facteur s le long de la demi-géodésique hyperbolique issue de x passant par y' i.e., $d_h(x, \omega_s(y')) = s \cdot d_h(x, y')$). On note aussi $\widehat{\omega}_s = \varphi \circ \omega_s^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

On définit alors, pour $s_0 > 1$, l'isotopie $\psi : [1, 2s_0] \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ par

$$\begin{cases} \psi_t = \omega_t & \text{si } t \in [1, s_0], \\ \psi_t = \varphi_{t-s_0} \circ \omega_{s_0} & \text{si } t \in [s_0, 1 + s_0], \\ \psi_t = \widehat{\omega}_{t-s_0} \circ \varphi \circ \omega_{s_0} & \text{si } t \in [1 + s_0, 2s_0]. \end{cases}$$

On vérifie que ψ_t relie l'identité à φ. Par suite, on a

$$\mathrm{Ang}_\varphi(x, y) = \mathrm{Ang}_{\omega_{s_0}}(x, y) + \mathrm{Ang}_\varphi\big(x, \omega_{s_0}(y)\big) + \mathrm{Ang}_{\widehat{\omega}_{s_0}}\big(\varphi(x), \varphi \circ \omega_{s_0}(y)\big).$$

La première isotopie garde x fixe et pousse y le long de la géodésique définie par (x, y), donc $|\mathrm{Ang}_{\omega_{s_0}}(x, y)| \leqslant 1/4$. La deuxième laisse $\omega_{s_0}(y)$ quasiment fixe si s_0 est assez grand et transporte x en $\varphi(x)$ en faisant au plus un demi-tour par rapport à $\omega_{s_0}(y)$. Enfin, la dernière fixe $\varphi(x)$ et fait tourner $\varphi(\omega_{s_0}(y))$ autour de $\varphi(x)$, donc $\mathrm{Ang}_{\widehat{\omega}_{s_0}}(\varphi(x), \varphi \circ \omega_{s_0}(y))$ mesure l'angle en $\varphi(x)$ entre les segments euclidiens $[\varphi(x), \varphi(\omega_{s_0}(y))]$ et $[\varphi(x), \varphi(y)]$; or $\mathrm{Re}\,\phi(\hat{z}) - \mathrm{Re}\,\phi(z)$ mesure l'angle asymptotique entre les segments hyperboliques de ces points quand $s_0 \to \infty$, d'où un décalage d'au plus un demi-tour. En conclusion,

$$\left|\mathrm{Ang}_\varphi(x, y)\right| \leqslant 2 + \left|\mathrm{Re}\,\phi(z) - \mathrm{Re}\,\phi(\hat{z})\right|. \qquad \square$$

Remarque. – L'isotopie (ψ_t) permet en particulier de montrer que $\varphi \mapsto \mathrm{Ang}_\varphi(x, y)$ est continue dans la topologie $\mathcal{C}^0$.

Démonstration de la proposition. – Comme ϕ est un relevé d'une application K-quasiconforme par un revêtement holomorphe, on en déduit que ϕ est aussi K-quasiconforme. On prolonge ϕ au plan par réflexion de Schwarz, ce qui ne change pas sa régularité. En fait, on a même mieux : une application quasiconforme du plan normalisée par $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$ est aussi quasisymétrique [6] i.e., il existe une fonction continue croissante $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui ne dépend que de K telle que $\eta(0) = 0$, et, si z_1, z_2 et z_3 sont trois points du plan deux à deux distincts alors

$$\left|\frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{\phi(z_1) - \phi(z_3)}\right| \leqslant \eta\left(\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right|\right).$$

Par suite, si w' est le projeté orthogonal de $\phi(z)$ sur $\mathbb{R}$ et si on note $w = \phi^{-1}(w')$, alors

$$\left|\frac{\phi(\hat{z}) - \phi(w)}{\phi(z) - \phi(w)}\right| \leqslant \eta\left(\left|\frac{\hat{z} - w}{z - w}\right|\right) \leqslant \eta(1),$$

car η est croissante et $|\hat{z} - w| \leqslant |z - w|$ par construction (si $\hat{z} = w$ alors la proposition découle du lemme). Donc $|\phi(\hat{z}) - \phi(w)| \leqslant \eta(1) \cdot |\phi(z) - \phi(w)|$, d'où $|\mathrm{Re}\,\phi(z) - \mathrm{Re}\,\phi(\hat{z})| \leqslant \eta(1) \cdot \mathrm{Im}\,\phi(z)$.

Du coup, si $\mathrm{Im}\,\phi(z) \leqslant 1$ alors $|\mathrm{Re}\,\phi(z) - \mathrm{Re}\,\phi(\hat{z})| \leqslant \eta(1)$. En revanche, si $\mathrm{Im}\,\phi(z) \geqslant 1$, alors $d_h(\varphi(x), \varphi(y)) = d_h(0, \exp(-2\pi\,\mathrm{Im}\,\phi(z)))$ est de l'ordre de $\exp(-2\pi\,\mathrm{Im}\,\phi(z))$. Donc

$$\mathrm{Im}\,\phi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \log\left[\frac{1}{d_h(\varphi(x), \varphi(y))}\right] + \mathrm{O}(1).$$

Mais, le théorème de Mori affirme qu'un homéomorphisme K-quasiconforme du disque qui fixe l'origine est Hölder de rapport $1/K$ dans la métrique euclidienne [1]. Or, sur tout compact, les métriques euclidienne et hyperbolique sont équivalentes, donc on peut lever l'hypothèse sur l'origine et conclure qu'un homéomorphisme K-quasiconforme du disque est localement Hölder de rapport $1/K$ dans la métrique hyperbolique. En appliquant cette observation à φ^{-1} et au cas $\mathrm{Im}\,\phi(z) \geqslant 1$, on obtient

$$\mathrm{Im}\,\phi(z) \leqslant \frac{K}{2\pi} \log\left[\frac{1}{d_h(x, y)}\right] + \mathrm{O}(1).$$

La proposition se déduit de ces estimations et du lemme.

Démonstration du théorème et du corollaire. – On note $\lambda(x)$ le coefficient infinitésimal de la métrique de Poincaré au point $x \in \mathbb{D}$, et $B_h(x)$ la boule unité centrée en x dans cette métrique. Dans la suite, on notera C une constante qui ne dépend que de K, mais qui pourra éventuellement changer dans une même suite d'inégalités.

Si $d_h(x,y) \geqslant 1$, alors $|\mathrm{Ang}_\varphi(x,y)| \leqslant C$. Donc

$$I_1 := \int_{\mathbb{D}} |\mathrm{d}x|^2 \int_{\mathbb{D}\setminus B_h(x)} \left|\mathrm{Ang}_\varphi(x,y)\right| \cdot |\mathrm{d}y|^2 \leqslant C < \infty.$$

Or, on a $\lambda(y) \geqslant 1$ pour tout $y \in \mathbb{D}$, donc, en utilisant aussi la proposition, on obtient

$$I := \int_{B_h(x)} \left|\mathrm{Ang}_\varphi(x,y)\right| \cdot |\mathrm{d}y|^2 \leqslant \int_{B_h(x)} C\left[1 + \log\left(1 + \frac{1}{d_h(x,y)}\right)\right] \cdot \lambda(y)^2 |\mathrm{d}y|^2\,;$$

on se ramène à l'origine par un changement de variable isométrique :

$$I \leqslant C \int_{B_h(0)} \left[1 + \log\left(1 + \frac{1}{d_h(0,y)}\right)\right] \cdot \lambda(y)^2 |\mathrm{d}y|^2 \leqslant C \cdot \int_{B_h(0)} \log\left(\frac{1}{r}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{O}(1),$$

car $\lambda(y) = \mathrm{O}(1)$ pour $y \in B_h(0)$. Du coup, on obtient

$$I_2 := \int_{\mathbb{D}} |\mathrm{d}x|^2 \int_{B_h(x)} \left|\mathrm{Ang}_\varphi(x,y)\right| |\mathrm{d}y|^2 \leqslant C.$$

Les estimations sur I_1 et I_2 entraînent (a).

Soit (φ_n) une suite de QC_0^K qui converge vers φ dans la topologie quasiconforme. La proposition ainsi que la démonstration du point (a) implique que l'application $(x,y) \mapsto C[1 + \log(1 + 1/d_h(x,y))]$ est une domination de la suite $\mathrm{Ang}_{\varphi_n}(x,y)$. Or, pour tout $x \neq y$, $\mathrm{Ang}_{\varphi_n}(x,y) \to \mathrm{Ang}_\varphi(x,y)$ (*cf.* la remarque suivant le lemme), d'où le point (b) par convergence dominée.

La démontration du premier point du corollaire a été évoquée avant l'énoncé du théorème (*voir* par exemple la première démonstration donnée dans [5]). Quant au second point, la continuité de l'invariant de Calabi ainsi que la compacité de QC_0^K implique que $\widetilde{C}(K)$ est atteint et que $\widetilde{C}$ est continue (et croissante). D'une part, le lemme de Weyl affirme que les homéomorphismes 1-quasiconformes sont conformes, donc $QC_0^1 = \{\mathrm{Id}\}$ par prolongement analytique et $\widetilde{C}(1) = C(\mathrm{Id}) = 0$. D'autre part, la non-trivialité de C implique que $\widetilde{C}$ est non bornée. Par conséquent, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires la surjectivité de $\widetilde{C}$. A $K \geqslant 1$ fixé, on considère $\varphi \in QC_0^K$ tel que $C(\varphi) = \widetilde{C}(K)$, ainsi qu'un flot hamiltonien $\phi^t_{\mathcal{H}} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tel que l'hamiltonien $\mathcal{H}$ ait une intégrale non nulle et soit à support compact. On a

$$C\left(\varphi \circ \phi^t_{\mathcal{H}}\right) = C\left(\phi^t_{\mathcal{H}}\right) + \int_{\mathbb{D}^2} \mathrm{Ang}_\varphi\left(\phi^t_{\mathcal{H}}(x), \phi^t_{\mathcal{H}}(y)\right) |\mathrm{d}x|^2 \cdot |\mathrm{d}y|^2 = C\left(\phi^t_{\mathcal{H}}\right) + C(\varphi)$$

car un flot hamiltonien préserve l'aire. Mais $C(\phi^t_{\mathcal{H}}) = -2t \int_{\mathbb{D}^2} \mathcal{H}$ d'après [5], donc, si t est du signe opposé de $\int_{\mathbb{D}^2} \mathcal{H}$, alors $\widetilde{C}(K_{\varphi\circ\phi^t_{\mathcal{H}}}) \geqslant C(\varphi\circ\phi^t_{\mathcal{H}}) > C(\varphi) = \widetilde{C}(K)$. Par suite, $K < K_{\varphi\circ\phi^t_{\mathcal{H}}} \leqslant K \cdot K_{\phi^t_{\mathcal{H}}}$ et $K_{\varphi\circ\phi^t_{\mathcal{H}}} \to K$ quand $t \to 0$. Du coup, $\widetilde{C}$ est strictement croissante.

Remerciements. Je remercie Tan Lei de m'avoir suggéré d'étudier l'invariant de Calabi dans le cadre quasiconforme. Etienne Ghys m'a présenté ses propres travaux sur le sujet et je lui en suis reconnaissant. Je remercie également le rapporteur pour ses remarques : l'exposition s'en est trouvée améliorée.

Références bibliographiques

[1] L. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, 1966.
[2] L. Ahlfors, Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory, McGraw-Hill, 1973.
[3] E. Calabi, On the group of automorphisms of a symplectic manifold, in : Problems in Analysis (Lectures at the Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, NJ, 1969), Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970, pp. 1–26.
[4] A. Fathi, Transformations et homéomorphismes préservant la mesure, Systèmes dynamiques minimaux, Thèse, Orsay, 1980.
[5] J.M. Gambaudo, E. Ghys, Enlacements asymptotiques, Topology 36 (6) (1997) 1355–1379.
[6] J. Väisälä, Quasisymmetric embeddings in Euclidean spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1) (1981) 191–204.