

Sur les équations α Navier–Stokes dans un ouvert borné

Adriana Valentina Busuioc

Département de mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Suisse

Reçu le 18 janvier 2002 ; accepté le 21 janvier 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On considère les équations α Navier–Stokes (LANS- α) dans un domaine borné de \mathbb{R}^3 . On montre l'existence et l'unicité globale des solutions, en supposant que la donnée initiale appartient à H_0^1 . *Pour citer cet article : A. Valentina Busuioc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 823–826.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On α Navier–Stokes equations on a bounded domain

Abstract We consider the Lagrangian averaged Navier–Stokes (LANS- α) equations in a bounded domain of \mathbb{R}^3 . We prove global existence and uniqueness of solutions under the hypothesis that the initial data belongs to H_0^1 . *To cite this article: A. Valentina Busuioc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 823–826.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

En 1993, Camassa et Holm proposent une nouvelle équation pour l'étude du mouvement d'un fluide en eau peu profonde [2]. Ces auteurs considèrent l'équation d'Euler dans un domaine avec un bord inférieur plan fixe, et un bord supérieur surface libre se prolongeant à l'infini dans les directions horizontales. Dans cette équation on introduit une forme particulière de solution, forme motivée par l'asymptotique usuelle du mouvement en eau peu profonde. Ceci conduit aux équations de Green–Naghdi, qui sont hamiltoniennes. De nouveaux développements asymptotiques peuvent être effectués dans cette équation ; ils conduisent, par exemple, à l'équation de Korteweg de Vries, ou encore à l'équation de Benjamin–Bona–Mahony. L'idée nouvelle de Camassa et Holm a été de faire un développement asymptotique dans le hamiltonien de l'équation de Green–Naghdi, au lieu de le faire dans l'équation elle-même. Ensuite, l'équation est retrouvée à partir du nouvel hamiltonien. Ils obtiennent ainsi, le modèle suivant pour le mouvement en eau peu profonde en dimension 1 :

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \quad (1)$$

Les mêmes auteurs et Kouranbaeva [8] remarquent que, pour $k = 0$, l'équation (1) décrit le mouvement le long des géodésiques du groupe des difféomorphismes associé à la métrique donnée par la norme H^1 ; Misiólek [10] prouve le même résultat pour $k \neq 0$. A partir de cette remarque Holm, Marsden et Ratiu [7] généralisent au cas de dimensions supérieures et au cas incompressible. Il suffit de faire la même chose en dimension n , en considérant le groupe des difféomorphismes qui conservent le volume (afin d'assurer l'incompressibilité) et la métrique donnée par la norme H_α^1 : $\|u\|_{H_\alpha^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2}$.

Adresse e-mail : adriana.busuioc@epfl.ch (A. Valentina Busuioc).

L'équation qui en résulte s'appelle équation α -Euler (LAE- α), car les mêmes auteurs l'obtiennent aussi par l'intermédiaire d'une moyennisation dans l'équation d'Euler; cette généralisation « mathématique » s'est avérée aussi « physique ». Il est tout à fait remarquable de constater que cette équation est identique à celle d'un fluide non-newtonien, le fluide de grade 2 à viscosité nulle (voir [1,4]) :

$$\partial_t(u - \alpha^2 \Delta u) + \sum_j (u - \alpha^2 \Delta u)_j \nabla u_j + u \cdot \nabla (u - \alpha^2 \Delta u) = -\nabla p. \tag{2}$$

Concernant les propriétés géométriques de cette équation, nous renvoyons à [7] et [9]. A partir de ce modèle, Chen et al. [3] proposent un deuxième « α -modèle », en introduisant le facteur « viscosité ». Le résultat est appelé équation α Navier–Stokes (LANS- α) ou le α -modèle visqueux. La seule différence avec l'équation α -Euler est que le modèle visqueux contient le terme supplémentaire de viscosité $-\nu \Delta (u - \alpha^2 \Delta u)$.

Ce modèle a été récemment étudié du point de vue de l'existence et l'unicité de la solution. Les premiers à donner un résultat de ce type sont Foias, Holm et Titi dans [6]. Ces auteurs considèrent le cas périodique tridimensionnel et montrent l'existence et l'unicité globale de la solution, en supposant que la donnée initiale est dans H^1 . Un problème proche, sur un ouvert borné, est abordé par Marsden et Shkoller [9]; ils montrent l'existence globale et l'unicité de la solution, toujours en dimension 3, mais en supposant la donnée initiale dans H^3 . Ces résultats sont obtenus pour l'équation suivante :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \mathcal{U}^\alpha(u) = -\nu A u - (1 - \alpha^2 \Delta)^{-1} \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{3}$$

avec les conditions au bord :

$$u = A u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{4}$$

où $\mathcal{U}^\alpha(u) = \alpha^2(1 - \alpha^2 \Delta)^{-1} \operatorname{div}[\nabla u \nabla u^T + \nabla u \nabla u - \nabla u^T \nabla u]$ et $A = -\mathbb{P} \Delta$ est l'opérateur de Stokes (\mathbb{P} est le projecteur de Leray). Ce résultat est ensuite amélioré par Coutand, Peirce et Shkoller [5], qui montrent ce même résultat pour des données initiales $u_0 \in H_0^1$. La preuve de Coutand, Peirce et Shkoller utilise la même forme d'équation ((3) et (4)) et consiste à faire une sorte de passage à la limite en approchant la donnée initiale H_0^1 par une suite de données initiales H^3 pour lesquelles il y a existence et unicité globale par le théorème de Marsden et Shkoller.

Le but de cette Note est de donner une démonstration simple et directe de l'existence et de l'unicité globales des solutions à données initiales H_0^1 pour l'équation LANS- α (5) proposée par Foias, Holm et Titi [6]; les conditions au bord sont $u = \partial u / \partial n = 0$ ($\partial / \partial n$ désigne la dérivée normale au bord).

2. Théorème d'existence et unicité

Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^3 . On note n le vecteur normal au bord et $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'ensemble des fonctions régulières à support compact dans Ω pour la topologie de $H^m(\Omega)$.

Avec les notations classiques, le système d'équations qu'on se propose d'étudier est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v + u \cdot \nabla v + \sum_j v_j \nabla u_j - \nu \Delta v = -\nabla p, & \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où l'on a défini $v = u - \alpha^2 \Delta u$; les paramètres α^2 et ν sont strictement positifs. Comme u s'annule sur le bord, les dérivées tangentielles de u sont nulles sur le bord. Par conséquent, comme la dérivée normale de u est nulle sur le bord, il s'ensuit que tout le gradient de u est nul sur le bord. Ainsi, nos conditions aux limites consistent à dire que u et toutes ses dérivées d'ordre 1 s'annulent sur le bord. Pour un champ de vecteurs H^2 cela se traduit par l'appartenance à l'espace $H_0^2(\Omega)$.

Nous montrons le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Considérons l'équation (5) dans le domaine Ω . Pour toute donnée initiale u_0 de divergence nulle et appartenant à $H_0^1(\Omega)$ il existe une unique solution globale :*

$$u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^2(\Omega)).$$

Remarquons que les conditions aux limites sont implicitement contenues dans la condition d'appartenance de la solution à l'espace $L^2(0, \infty; H_0^2(\Omega))$. Il est facile de démontrer des résultats meilleurs de régularité pour la solution u . Cependant, la régularité annoncée dans ce théorème suffit pour donner un sens à l'équation dans l'espace des distributions. En effet, le seul terme qui, a priori, n'est pas défini à cause des dérivées d'ordre 3 de u est le terme $u \cdot \nabla v$. Or on peut sortir les dérivées à l'extérieur $u \cdot \nabla v = \operatorname{div}(u \otimes v)$ et remarquer que $u \otimes v$ est bien défini dans l'espace des distributions donc $u \cdot \nabla v$ aussi.

La preuve de l'existence consiste à démontrer d'abord des estimations « a priori » et de passer ensuite à la limite, en utilisant la méthode de Galerkin. L'unicité se démontre immédiatement en remarquant que nos conditions au bord permettent de faire les mêmes intégrations par parties et donc les mêmes estimations que dans l'article de Foias, Holm et Titi [6].

2.1. Estimations « a priori »

On multiplie l'équation (5) par u et on intègre en espace. On obtient : $\int_{\Omega} \partial_t v \cdot u + \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \cdot u + \sum_j \int_{\Omega} v_j \nabla u_j \cdot u - v \int_{\Omega} \Delta v \cdot u = 0$. Des intégrations par parties utilisant u nulle au bord montrent que :

$$\int_{\Omega} \partial_t v \cdot u = \int_{\Omega} (\partial_t (u - \alpha^2 \Delta u)) \cdot u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H_\alpha^1}^2.$$

Ensuite, un simple calcul d'intégrations par parties utilisant seulement u de divergence nulle et tangent au bord montre que : $\int_{\Omega} u \cdot \nabla v \cdot u + \sum_j \int_{\Omega} v_j \nabla u_j \cdot u = 0$. Il reste à estimer : $-\int_{\Omega} \Delta v \cdot u = -\int_{\Omega} \Delta u \cdot u + \alpha^2 \int_{\Omega} \Delta \Delta u \cdot u$. Comme u est nul au bord, le premier terme de la partie de droite peut facilement s'intégrer par parties. On peut aussi intégrer par parties le deuxième terme et on remarque que tous les termes de bord contiennent un facteur avec des composantes de u ou de ses dérivées d'ordre 1. Par conséquent, ces termes de bord sont nuls et l'on obtient finalement :

$$-\int_{\Omega} \Delta v \cdot u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha^2 \int_{\Omega} |\Delta u|^2. \tag{6}$$

Or il est simple de voir que cette expression est une quantité équivalente à la norme $H^2(\Omega)$. On peut faire des intégrations par parties pour retrouver la norme H^2 ou bien utiliser le résultat classique d'ellipticité : pour une fonction f s'annulant sur le bord, la norme H^2 de f se majore par une constante fois la norme L^2 de Δf .

On déduit finalement que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H_\alpha^1}^2 + \frac{\nu}{C} \|u\|_{H^2}^2 \leq 0,$$

pour une certaine constante C . Après intégration il vient :

$$\|u(t)\|_{H_\alpha^1}^2 + \frac{2\nu}{C} \int_0^t \|u\|_{H^2}^2 \leq \|u_0\|_{H_\alpha^1}^2; \tag{7}$$

d'où les estimations « a priori » suivantes :

$$\|u\|_{L^\infty(0, \infty; H_0^1)} \leq C_1 \|u_0\|_{H^1}, \quad \|u\|_{L^2(0, \infty; H_0^2)} \leq C_2 \|u_0\|_{H^1}. \tag{8}$$

2.2. Passage à la limite

On utilise une méthode de Galerkin standard. Soit

$$X_m = \{u \in (H_0^m(\Omega))^3; \operatorname{div} u = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{u \in (L^2(\Omega))^3; \operatorname{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire L^2 . Il existe une famille orthonormale et complète de vecteurs w_k tels que

$$w_k \in X_2 \quad \text{et} \quad \langle w_k, v \rangle_{H^2} = \lambda_k \langle w_k, v \rangle_{H_\alpha^1} \quad \forall v \in X_2.$$

On utilise cette base de vecteurs propres dans la méthode de Galerkin. On cherche $u^n(t)$ de la forme $u^n(t) = \sum_{k=1}^n g_{kn}(t)w_k$ tel que :

$$\frac{d}{dt} \langle v^n, w_i \rangle = - \langle u^n \cdot \nabla v^n, w_i \rangle - \sum_j \langle v_j^n \nabla u_j^n, w_i \rangle + \nu \langle \Delta v^n, w_i \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u^n(0) = P_n u_0; \quad (9)$$

où P_n désigne la projection orthogonale sur l'espace engendré par w_1, \dots, w_n . On multiplie ensuite chaque équation du système ci-dessus par $g_{in}(t)$ et l'on somme sur i . Les mêmes calculs que dans les estimations « a priori » montrent alors que les estimations (8) sont vérifiées par u^n (on déduit en particulier que u^n existe globalement). L'équation (9) implique aussi que :

$$\partial_t v^n = -P_n \left(u^n \cdot \nabla v^n + \sum_j v_j^n \nabla u_j^n - \nu \Delta v^n \right).$$

On déduit immédiatement, à partir de cette relation et des estimations sur u^n , que $\partial_t u^n$ est borné dans $L^2(0, \infty; H)$.

On dispose donc des bornes sur u^n et $\partial_t u^n$. Le passage à la limite est maintenant standard et nous permet d'obtenir à la limite un champ de vecteurs $u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^2(\Omega))$ qui vérifie la formulation variationnelle de (5).

2.3. Unicité de la solution

Soient u et \tilde{u} deux solutions de l'équation (5) telles que $u(0) = \tilde{u}(0)$ et on pose $w = u - \tilde{u}$. La régularité de u implique facilement que les termes $u \cdot \nabla v + \sum_j v_j \nabla u_j - \nu \Delta v$ appartiennent à l'espace $L^2(0, \infty; H^{-2}(\Omega))$ où on a noté $H^{-2}(\Omega)$ le dual de $H_0^2(\Omega)$. En appliquant le projecteur de Leray à (5) on déduit que $\partial_t w$ appartient aussi à l'espace $L^2(0, \infty; H^{-2}(\Omega))$ et donc tous les termes de (5) sont dans cet espace. Par conséquent, tous les termes de l'équation de w sont dans cet espace. On conclut que l'équation pour w peut être multipliée par des champs de vecteurs de $L^2(0, \infty; H_0^2(\Omega))$, en particulier par w . Dès que l'équation de w est multipliée par w , on peut utiliser les calculs de Foias, Holm et Titi en remarquant que nos conditions au bord permettent d'éliminer tous les termes de bord qui apparaissent. On aboutit ainsi à l'estimation suivante : $\partial_t \|w\|_{H_0^1}^2 + C \|w\|_{H^2}^2 \leq C \|w\|_{H_0^1}^2 (\|u\|_{H^2}^2 + \|\tilde{u}\|_{H^2}^2)$.

Après application du lemme de Gronwall on trouve que $w = 0$ ce qui achève la preuve.

Références bibliographiques

- [1] A. Valentina Busuioc, On second grade fluids with vanishing viscosity, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 328 (12) (1999) 1241–1246.
- [2] R. Camassa, D.D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, Phys. Rev. Lett. 71 (11) (1993) 1661–1664.
- [3] S. Chen, C. Foias, D.D. Holm, E. Olson, E.S. Titi, S. Wynne, The Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 5338–5341.
- [4] D. Cioranescu, E.H. Ouazar, Existence and uniqueness for fluids of second grade, in: Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. VI, Paris, 1982/1983, Pitman, Boston, MA, 1984, pp. 178–197.
- [5] D. Coutand, J. Peirce, S. Shkoller, Global well-posedness of weak solutions for the Lagrangian averaged Navier–Stokes equations on bounded domains, Comm. Pure Appl. Anal., to appear.
- [6] C. Foias, D.D. Holm, E.S. Titi, The three-dimensional viscous Camassa–Holm equations and their relation to the Navier–Stokes equation and turbulence theory, J. Dynamics Differential Equations, to appear.
- [7] D.D. Holm, J.E. Marsden, T. Ratiu, Euler–Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion, Phys. Rev. Lett. 80 (19) (1998) 4173–4177.
- [8] S. Kouranbaeva, The Camassa–Holm equation as a geodesic flow on the diffeomorphism group, J. Math. Phys. 40 (2) (1999) 857–868.
- [9] J.E. Marsden, S. Shkoller, Global well-posedness for the LANS- α equations on bounded domains, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 359 (2001) 1449–1468.
- [10] G. Misiolek, A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott–Virasoro group, J. Geom. Phys. 24 (3) (1998) 203–208.