C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1107–1112

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*
(Analyse complexe/*Complex Analysis*)

Sur la vitesse d'explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique

Arnaud Chéritat

Topologie et dynamique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 2 avril 2002 ; accepté le 8 avril 2002

Note présentée par Adrien Douady.

Résumé Nous introduisons la notion de taille asymptotique d'un point fixe parabolique, et la relions à la vitesse d'explosion en un cycle dans certains cas. Pour les points fixes de la famille quadratique, nous donnons une relation avec le rayon conforme interne des disques de Siegel. Les applications apparaîtront dans une note ultérieure. ***Pour citer cet article : A. Chéritat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1107–1112.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

About the speed of explosion of parabolic fixed points in the quadratic family

Abstract We define the asymptotic size of a parabolic fixed point, and link it to the speed of explosion into a cycle in some cases. For the fixed points of the quadratic family, we give a relation to the inner conformal radius of Siegel disks. Applications will be given in a further note. ***To cite this article: A. Chéritat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1107–1112.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

1. The asymptotic size of a parabolic germ

Let f be a germ of parabolic fixed point: $f(0)=0$, and $f'(0)$ is a root of unity. Let $k\in\mathbb{N}^*$ such that $(f^k)'(0)=1$. If $f^k=\mathrm{Id}$ let $L(f)=+\infty$. Otherwise let $r\in\mathbb{N}^*$ such that $f^k(z)-z$ has a root of order $1+r$ at 0. In that case there exists a unique $L=L(f)>0$ such that for all z attracted by 0 under the dynamics f,

$$\left|f^n(z)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{1/r}}.$$

The number $L(f)$ is called the *asymptotic size* of f. Its definition is independent of the choice of k. Let us write

$$f^k(z)=z+Cz^{r+1}+\mathrm{O}\left(z^{r+2}\right)$$

with $C\in\mathbb{C}^*$. Then

$$L(f)=\left|\frac{k}{rC}\right|^{1/r}.$$

Adresse e-mail : arnaud.cheritat@math.u-psud.fr (A. Chéritat).

S1631-073X(02)02395-6/FLA

2. Speed of explosion

Let p/q be an irreducible fraction with $q > 0$ and $\lambda_0 = \mathrm{i}2\pi p/q$. Suppose $f_\lambda(z) = f(\lambda, z)$ is an analytic function from a neighborhood of $(\lambda_0, 0)$ to $\mathbb{C}$ with

$$f_\lambda(z) \underset{z\to 0}{=} \mathrm{e}^\lambda z + \mathrm{O}\big(z^2\big).$$

We will make a further assumption: that $r = q$, i.e.

$$f_{\lambda_0}^q(z) = z + Cz^{q+1} + \mathrm{O}\big(z^{q+2}\big)$$

for some complex number $C \neq 0$. We will note L_a the asymptotic size of $f_{\lambda_0}^q$:

$$L_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} L\big(f_{\lambda_0}^q\big) = \left|\frac{1}{qC}\right|^{1/q}.$$

The function $f_{\lambda_0}^q$ has $q+1$ fixed points merged at 0. When one perturbs λ_0, it explodes into the union of 0 and of a cycle of f_{λ_0} of period exactly q. With the implicit function theorem, one can show that the exploded cycle may be written $\chi(\delta)$ where χ is a holomorphic function and δ is the set of q-th roots of $\lambda - \lambda_0$. An elementary computation yields: $\chi'(0)^q = -q/C$. Thus

$$\big|\chi'(0)\big| = q^{2/q} L_a.$$

3. The case of the quadratic family

Let $P_\lambda(z) = \mathrm{e}^\lambda z + z^2$ and $L_a(p/q) = L(P^q_{\mathrm{ic}2\pi p/q})$. The function $P_\lambda(z)$ satisfies the assumptions of the previous section. If $\theta \in \mathbb{R}$ is irrational, then either 0 is a Siegel point of $P_{\mathrm{i}2\pi\theta}$ or a Crémer point. In the first case, let $r(\theta)$ be the conformal radius at 0 of the Siegel disk $\Delta(\theta)$ (that is the unique $r > 0$ such that there exists a analytic diffeomorphism from $r\mathbb{D}$ to $\Delta(\theta)$ that sends 0 on 0 with derivative 1 at 0). In the second case, and in the case $\theta \in \mathbb{Q}$, let $\Delta(\theta) = \emptyset$ and $r(\theta) = 0$. Then

THEOREM. –

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \limsup_{p/q \underset{\neq}{\longrightarrow} \theta} \left(L_a\left(\frac{p}{q}\right)\right) = r(\theta), \tag{1}$$

$$\forall\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(L_a\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right) = r(\theta), \tag{2}$$

where (p_n/q_n) is the sequence of convergents of the continued fraction of θ.

The proof is based on the work of Jellouli [5–7], and on the following crucial inequality:

LEMMA. – *There exists a sequence $R_q \sim \mathrm{cst}/q^3$ such that for all irreducible fraction p/q ($q > 0$), the the set of values of λ on which one can follow holomorphically the explosion in terms of the q-th roots of $\lambda - \mathrm{i}2\pi p/q$ contains the ball of center $\mathrm{i}2\pi p/q$ and radius R_q.*

---

1. La taille asymptotique d'un germe parabolique

Soit f un germe holomorphe de point fixe parabolique, c'est à dire un germe en 0 tel que $f(0) = 0$ et $f'(0)$ soit une racine de l'unité. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(f^k)'(0) = 1$. Si f^k est l'identité (condition indépendante de k), nous poserons $L(f) = +\infty$. Sinon, soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que l'ordre d'annulation de $f^k(z) - z$ en 0 soit égal à $1 + r$ (r est le nombre de pétales, indépendant de k, *voir* [3] où il est démontré que r est un multiple de l'ordre de $f'(0)$ dans le groupe des racines de l'unité). Le bassin d'attraction A de 0, c'est à dire l'ensemble des points z tels que $f^n(z) \to 0$ par valeurs distinctes de 0, est un ouvert non vide et adhérent à 0 (il contient la fleur de Leau, *voir* [3]). Il existe alors un unique $L = L(f) > 0$ tel que $\forall z \in A$,

$$\left|f^n(z)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{1/r}}.$$

Notons que cet équivalent est indépendant de z. Considérons-le comme un développement asymptotique, par rapport à n, à un seul terme : pour voir apparaître la dépendance en z, il faudrait le pousser plus loin.

DÉFINITION 1. – Nous appellerons L la *taille asymptotique* de f au point parabolique 0.

Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$

$$f^k(z) = z + Cz^{r+1} + \mathrm{O}\big(z^{r+2}\big)$$

avec $C \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$L(f) = \left|\frac{k}{rC}\right|^{1/r}.$$

Il est facile de voir avec la définition de L que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$L\big(f^m\big) = \frac{L(f)}{m^{1/r}}.$$

2. Vitesse d'explosion

Soit p/q une fraction irréductible ($q > 0$),

$$\lambda_0 = \mathrm{i}2\pi\frac{p}{q}$$

et $f_\lambda(z) = f(\lambda, z) \in \mathbb{C}$ une fonction analytique à deux variables définie au voisinage de $(\lambda_0, 0)$ et vérifiant

$$f_\lambda(z) \underset{z\to 0}{=} \mathrm{e}^\lambda z + \mathrm{O}\big(z^2\big).$$

Supposons de plus que $f_{\lambda_0}^q$ possède exactement q pétales : $r = q$ (sinon il peut arriver que r soit un multiple de q). Soit $C \neq 0$ tel que

$$f_{\lambda_0}^q(z) = z + Cz^{q+1} + \mathrm{O}\big(z^{q+2}\big)$$

et notons L_a la taille asymptotique de $f_{\lambda_0}^q$:

$$L_a \stackrel{\text{def}}{=} L\big(f_{\lambda_0}^q\big) = \left|\frac{1}{qC}\right|^{1/q}.$$

Attention, si $q \neq 1$, $L_a = L(f_{\lambda_0}^q)$ est différent de $L(f_{\lambda_0})$: des définitions, il découle qu'ils sont liés par la relation $L(f_{\lambda_0}) = q^{1/q} L(f_{\lambda_0}^q)$. Notons que $q^{1/q} \to 1$ quand $q \to +\infty$, ce qui fait que l'on pourrait (pour nos applications) indifféremment prendre $L(f_{\lambda_0})$ ou $L(f_{\lambda_0}^q)$.

En 0, la fonction $f_{\lambda_0}^q$ possède exactement $q+1$ points fixes confondus. Quand on perturbe λ_0 en un paramètre λ proche, le point fixe multiple 0 de $f_{\lambda_0}^q$ explose en la réunion de 0 et d'un cycle de f_λ de longueur exactement q. Le multiplicateur de ce cycle sera noté m. Un calcul (on pourra par exemple consulter [7], Proposition 1, calcul de $\rho'(\lambda_0)$) montre que

$$m = 1 - q^2\varepsilon + \mathrm{O}\big(\varepsilon^2\big),$$

où $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$. Ainsi, on peut changer de paramètre et prendre m au lieu de λ. Nous noterons η une racine q-ième de $m - m_0$, où $m_0 = 1$:

$$\eta^q = m - 1.$$

Une application du théorème des fonctions implicites montre que pour ε petit (ssi η petit), le cycle s'écrit $\chi(\delta)$ où χ est une fonction holomorphe et δ désigne les q racines q-ièmes de $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$. Un calcul élémentaire donne :

$$\chi'(0)^q = -\frac{q}{C}.$$

DÉFINITION 2. – Nous appellerons *vitesse d'explosion* du point parabolique 0 la dérivée suivante prise en $\eta = 0$:

$$V_e = \left|\frac{\partial\chi}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}.$$

On calcule $V_e = |\chi'(0)|/q^{2/q} = |1/qC|^{1/q}$, d'où :

PROPOSITION 1. –

$$V_e = L_a.$$

3. Cas de la famille quadratique

Soit

$$P_\lambda(z) = \mathrm{e}^\lambda z + z^2.$$

On notera $K(P)$ l'ensemble de Julia rempli du polynôme P, et J son bord (*voir* [3] pour la définition de ces objets). Nous noterons $C\left(\frac{p}{q}\right)$ et $L_a\left(\frac{p}{q}\right)$ les valeurs de la constante C et la taille asymptotique correspondant à l'itéré q-ième de $P_{\mathrm{i}2\pi p/q}$.

Si $\theta \in \mathbb{R}$ est irrationnel, alors 0 est soit un point de Siegel de $P_{\mathrm{i}2\pi\theta}$, soit un point de Crémer. Dans le premier cas, on note $r(\theta)$ le rayon conforme interne au point 0 du disque de Siegel $\Delta(\theta)$ de $P_{\mathrm{i}2\pi\theta}$ (il s'agit du rayon r de l'unique disque $r\mathbb{D}$ de centre 0 pour lequel il existe un difféomorphisme analytique de $r\mathbb{D}$ dans Δ qui envoie 0 sur 0 avec dérivée 1 en 0). Dans le deuxième cas, ainsi que dans le cas où $\theta \in \mathbb{Q}$, on pose $\Delta(\theta) = \varnothing$ et $r(\theta) = 0$. Les énoncés de cette note, ainsi que leurs preuves, ne nécessitent pas de connaître la caractérisation de Bjruno–Yoccoz des $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a un point de Siegel (que l'on trouvera dans [8]). Il n'est pas non plus fait usage des applications quasiconformes, ni de la théorie de l'implosion parabolique.

THÉORÈME 1. –

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\quad \limsup_{p/q \underset{\neq}{\longrightarrow} \theta}\left(L_a\left(\frac{p}{q}\right)\right) = r(\theta), \tag{1}$$

$$\forall\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(L_a\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right) = r(\theta), \tag{2}$$

où p_n/q_n est la suite des réduites en fraction continue de θ.

Notons que puisque l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquels 0 est un point de Crémer ou parabolique est dense dans $\mathbb{R}$, le théorème précédent implique que $\liminf_{p/q \underset{\neq}{\to} \theta}(L_a(p/q)) = 0$. D'autre part, le même énoncé tient avec la taille asymptotique $L'_a = q^{1/q}L_a$ de $P_{\mathrm{i}2\pi p/q}$ au lieu de $P^q_{\mathrm{i}2\pi p/q}$, ou bien avec la vitesse d'explosion par rapport à m : $V_e = |\partial\chi/\partial m| = L_a$, ou bien avec la vitesse d'explosion par rapport à λ : $|\partial\chi/\partial\lambda| = q^{2/q}V_e$, car dans chaque cas, leur quotient par rapport à $L_a(p/q)$ est égal à une puissance fixe de $q^{1/q}$, or $q^{1/q} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Pour prouver le Théorème 1, il suffit de prouver l'inégalité $\leqslant$ dans (1), et l'inégalité $\liminf\ldots \geqslant r(\theta)$ dans (2). Sous cette forme, la deuxième inégalité est une conséquence de l'analyse faite par Habib Jellouli dans sa thèse (*voir* [5] ou [6]). La première fait intervenir l'étude de l'explosion des points paraboliques.

3.1. La borne inférieure

L'inégalité $\liminf L_a(p_n/q_n) \geqslant r(\theta)$ résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 1 (Jellouli [5]). – *Supposons que $r(\theta) > 0$, et soit Φ l'isomorphisme conforme de $\Delta(\theta)$ vers le disque $r(\theta)\mathbb{D}$ vérifiant $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0) = 1$. Soit $F_\lambda = \Phi \circ P_\lambda \circ \Phi^{-1}$. Soit $\lambda_n = \mathrm{i}2\pi P_n/q_n$. Alors pour tout compact C de $r(\theta)\mathbb{D}$, il existe N tel que $\forall n > N$, les q_n premières itérées de F_{λ_n} sont définies sur C et ne sortent pas de $r(\theta)\mathbb{D}$. De plus, $F_{\lambda_n}^{q_n} \to \mathrm{Id}$ uniformément sur tout compact de $r(\theta)\mathbb{D}$.*

Le lemme ci-dessous est conséquence d'une majoration élémentaire de $C(p/q)$:

LEMME 2. – *Soit $G_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes ayant en 0 un point fixe parabolique de multiplicité $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et telle que $G_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Id}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ (la condition plus faible que (G_n) est bornée sur tout compact suffit également). Soit $L_a(n)$ la taille asymptotique de G_n en 0. Alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} L_a(n) \geqslant 1.$$

3.2. La borne supérieure

Nous avons besoin de préciser la façon dont on peut suivre l'explosion du point parabolique. Soit p/q une fraction irréductible, et $\lambda_0 = \mathrm{i}2\pi \frac{p}{q}$. Perturbons λ_0 en

$$\lambda = \lambda_0 + \delta^q,$$

où δ est un paramètre. Le lemme suivant est une application assez simple du théorème des fonctions implicites.

LEMME 3 (Description de l'explosion). – *Il existe $r > 0$, une fonction analytique $\chi : r^{1/q}\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et des fonctions analytiques $\xi_1, \dots, \xi_k$ de $B = B(\lambda_0, r)$ dans $\mathbb{C}$, telles que :*

- *pour tout $\delta \in r^{1/q}\mathbb{D}$ non nul et pour $\lambda = \lambda_0 + \delta^q$, les points fixes de P_λ^q sont les $q + 1 + k$ points* distincts *suivants : 0, $\chi(\delta)$, $\chi(\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/q}), \dots, \chi(\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(q-1)/q})$, $\xi_1(\lambda), \dots, \xi_k(\lambda)$. Ce sont tous des points fixes de multiplicité 1 ;*
- *en zéro, $\chi(0) = 0$, et pour $\delta = 0$ et $\lambda = \lambda_0$, les points fixes de P_λ^q sont les $k + 1$ points* distincts *suivants : 0 avec multiplicité $q + 1$, et $\xi_1(\lambda), \dots, \xi_k(\lambda)$ avec multiplicité 1 ;*
- *en zéro, $\chi'(0)^q = -q/C$ où $C = C(p/q)$.*

Pour la borne, un point crucial est de pouvoir prendre une valeur de r suffisamment grande. La combinatoire des polynômes quadratiques, ainsi que l'inégalité de Yoccoz sur la taille des membres de l'ensemble de Mandelbrot (*voir* [4]) permettent de prouver le lemme suivant.

LEMME 4. – *Il existe une suite $R_q > 0$, $q \in \mathbb{N}$, telle que*

$$R_q \sim \frac{\mathrm{cste}}{q^3}$$

et telle que pour toute fraction irréductible p/q, on peut prendre $r = R_q$ dans le lemme précédent.

En effet, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des paramètres λ tels que P_λ^q possède un point fixe de multiplicateur 1. D'après le théorème des fonctions implicites appliqué à l'équation $P_\lambda^q(z) - z$, on peut suivre localement un point périodique analytiquement en fonction du paramètre λ (donc en fonction de δ), tant que son multiplicateur est différent de 1, c'est à dire quand on n'est pas dans $\mathcal{P}$. D'autre part, le Lemme 3 appliqué à n'importe quelle valeur de r montre qu'on peut suivre analytiquement l'explosion du point parabolique en termes de δ. Ceci implique que l'on peut prendre pour r la distance d de $\lambda_0 = \mathrm{i}2\pi p/q$ à $\mathcal{P} \setminus \{\lambda_0\}$. Pour minorer cette distance d, nous remarquons à l'aide d'une étude combinatoire que pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$ différent de λ_0, soit $\lambda = \mathrm{i}2\pi p'/q$ pour un entier $p' \in \mathbb{Z}$, auquel cas $|\lambda - \lambda_0| \geqslant 2\pi/q$, soit λ est dans un membre p'/q' de l'ensemble de Mandelbrot vu en coordonnées λ, avec $q' < q$ (et p'/q' irréductible). Dans ce cas par l'inégalité de Yoccoz, ce membre est inclus dans le disque tangent à droite en sa racine $\mathrm{i}2\pi p'/q'$ à $\mathrm{i}\mathbb{R}$, et de rayon $\ln(2)/q'$, et sa racine est à une distance $\geqslant \frac{2\pi}{q(q-1)}$ de λ_0. On en déduit par un calcul de géométrie élémentaire que $|\lambda - \lambda_0|$ est minoré par une cste/q^3.

On conjecture que le rayon optimal est en cste/q^2. Cependant, pour les applications, nous avons juste besoin que $R_q^{1/q} \to 1$.

Preuve de la borne supérieure. – Comme $L_a = V_e$, il suffit de majorer V_e, c'est à dire $|\chi'(0)|$ puisque $V_e = |\chi'(0)|/q^{2/q}$ et $q^{2/q} \to 1$. Pour cela, nous choisissons une équipotentielle suffisamment proche de $K(P_{\mathrm{i}2\pi\theta})$ pour que le domaine de Jordan V qu'elle délimite ait en 0 un rayon conforme r proche de $r(\theta)$, qui est le rayon conforme du disque de Siegel s'il y en a un, ou 0 s'il n'y en a pas : c'est possible d'après le théorème de Carathéodory de convergence des fonctions univalentes. Nous appelons $\phi : V \to r\mathbb{D}$ l'uniformisation qui envoie 0 sur 0 avec dérivée 1 en ce point. La semi-continuité supérieure de $K(P_\lambda)$ en fonction de λ implique que pour λ dans un voisinage Λ de $\mathrm{i}2\pi\theta$, $K(P_\lambda) \subset V$. Pour p/q suffisamment proche de θ (et différent de θ si ce dernier est rationnel), quand δ varie dans le disque de centre 0 et de rayon $R_q^{1/q}$ (proche de 1), $\lambda = \mathrm{i}2\pi p/q + \delta^q$ varie dans le disque de centre $\mathrm{i}2\pi p/q$ et de rayon R_q (proche de 0), donc inclus dans Λ. Donc la fonction χ est à valeurs dans V car $\chi(\delta)$ est un point périodique de P_λ, donc appartient à $K(P_\lambda)$. Pour conclure, nous appliquons l'inégalité de Schwarz à $\phi \circ \chi$, qui envoie 0 sur 0, est définie sur un disque de rayon $R_q^{1/q}$ proche de 1 et à valeurs dans un disque de rayon r proche de $r(\theta)$, et dont la dérivée en 0 vaut exactement $\chi'(0)$.

4. Applications

Nous donnons dans notre thèse [1,2] une application à une conjecture de Douady, ainsi qu'à une preuve indépendante d'un théorème de Yoccoz (nécessité de la condition de Brjuno pour la présence d'un disque de Siegel pour la famille quadratique).

Références bibliographiques

[1] A. Chéritat, Estimates on the speed of explosion of the parabolic fixed points of quadratic polynomials and applications, Prépublication de l'université Paris-Sud, 99-77, 1999.
[2] A. Chéritat, Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive, Thèse, Université Paris-Sud, 2001.
[3] A. Douady, J.H. Hubbard, Étude dynamique des polynômes complexes, Publ. Math. Orsay, 1984–1985.
[4] J.H. Hubbard, Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: Three theorems of Yoccoz, in: L.R. Goldberg, J. Milnor, A.V. Phillips (Eds.), Topological Methods in Modern Mathematics: A symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday, Publish or Perish, 1993.
[5] H. Jellouli, Sur la densité intrinsèque pour la mesure de Lebesgue et quelques problèmes de dynamique holomorphe, Thèse, Université Paris-Sud, 1994.
[6] H. Jellouli, Perturbation d'une fonction linéarisable, in: Tan Lei (Ed.), The Mandelbrot Set, Theme and Variations, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 274, Cambridge University Press, 2000.
[7] H. Jellouli, Indice holomorphe et multiplicateur, in: Tan Lei (Ed.), The Mandelbrot Set, Theme and Variations, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 274, Cambridge University Press, 2000.
[8] J.C. Yoccoz, Petits diviseurs en dimension 1, Astérisque 231 (1995).