C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1035–1038

**Probabilités/*Probability Theory***
**(Statistique/*Statistics*)**

# Estimation fonctionnelle de la densité de l'opérateur de transition d'un processus de Markov à temps discret

**Ali Laksaci, Abderrahmane Yousfate**

**Laboratoire de mathématiques, Université de Sidi Bel Abbès, BP 89, Sidi Bel Abbès 22000, Algérie**

**Reçu le 4 septembre 2001 ; accepté après révision le 2 avril 2002**

**Note présentée par Paul Deheuvels.**

**Résumé** Pour certains processus de Markov à temps discret respectant certaines hypothèses assez générales, un estimateur à noyau de la densité de l'opérateur de transition (vu comme un endomorphisme de $\mathrm{L}^p$, $p \in [1, \infty[$) est étudié. Cet estimateur permet, par la suite, de construire un estimateur fonctionnel aussi bien pour l'opérateur de transition lui-même que pour son adjoint. Le résultat principal concerne une majoration de la vitesse de convergence (au sens de la norme $\mathrm{L}^p$) de l'estimateur construit. ***Pour citer cet article : A. Laksaci, A. Yousfate, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1035–1038.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Functional estimate of Markov transition operator density: Discrete time case

**Abstract** In this study, we build a kernel estimate of the transition operator density for some discrete time continuous states Markov processes which satisfy some general conditions. Assumptions are not restrictive and results can be used on transition Markov operator, viewed as an endomorphism on $\mathrm{L}^p$, $p \in [1, \infty[$, as well as on its adjoint. The main result deals with convergence rate of built kernel estimate. ***To cite this article: A. Laksaci, A. Yousfate, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1035–1038.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Historiquement, en 1969, Roussas [10] est le premier à aborder le problème de l'estimation fonctionnelle en utilisant des observations markoviennes. Ce dernier a établi la convergence de l'estimateur à noyau de la densité de la loi de transition au sens de $\mathrm{L}^2$. D'autres auteurs se sont intéressés à l'estimation fonctionnelle sur des processus markoviens, en traitant le cas de la densité de la loi stationnaire, sous la condition $G_2$, tel Rosenblatt en 1970 [9] ou en exploitant l'opérateur de transition comme un opérateur d'autorégression, sous des conditions de mélange, tels Collomb, Doukhan, Ghindès, en 1983 [5,6, ...], Györfi et al. en 1989 [8], Bosq en 1996 [3]. À ces études plusieurs auteurs ont ajouté des résultats sur les vitesses de convergence des estimateurs et/ou leur normalité asymptotique ainsi que des résultats sur la prévision [1,4,11–13, ...]. Dans ce travail on s'intéresse à la construction et aux propriétés d'un estimateur fonctionnel de la densité

*Adresses e-mail :* alilak@yahoo.fr (A. Laksaci); yousfate_a@yahoo.com (A. Yousfate).


S1631-073X(02)02397-X/FLA

de l'opérateur de transition, vu comme un endomorphisme de $L^p$, $p \in [1, \infty[$. Cet estimateur permet de construire un estimateur fonctionnel aussi bien pour l'opérateur de transition lui-même que pour son adjoint.

L'étude qui va suivre consiste à considérer un processus de Markov homogène et ergodique $(X_t)_{t\in N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La probabilité de passage de $(X_t)_{t\in N}$, ainsi que la loi initiale, sont supposées absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on note $\mu$. La densité de la loi de transition de $t$ à $t+s$ sachant $x$ au point $y$ est notée $p(x,s,y)$. La densité initiale au point $x$ est notée $f(x)$. En notant $\nu$ la loi stationnaire, on peut écrire $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$.

On suppose par la suite que $f$ est continue et bornée.

L'estimateur fonctionnel de $p(x,s,y)$ que l'on choisit s'écrit

$$p_n(x,s,y) = \frac{1}{h_n}\frac{\sum_{i=0}^n K((x-X_i)/h_n)K((y-X_{i+s})/h_n)}{\sum_{i=0}^n K((x-X_i)/h_n)}, \tag{1}$$

où $K$ est un noyau positif.

Cet estimateur a déjà été utilisé par Youndjé [14] pour estimer la densité conditionnelle en utilisant un $n$-échantillon i.i.d.

Pour étudier ce type d'estimateur, on s'intéresse au cas $s=1$ et l'on note $p(x,1,y)=p(x,y)$. Par ailleurs, on introduit les hypothèses suivantes :

(H.1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Gamma(x)$ mesurable ; tel que $0<\nu(\Gamma(x))<1$, la fermeture de $\Gamma(x)$ est connexe et contient $x$. De plus pour un certain $\alpha \in ]1/2, 1]$ et un $\beta > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ ; $m \leqslant 1/(\alpha\nu(\Gamma(x)^c))$ (où $\Gamma(x)^c = \Omega - \Gamma(x)$) tel que $\forall z \in \Gamma(x)$, $\int_{\Gamma(x)} p(z,m,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \beta\nu(\Gamma(x))$.

Cette hypothèse veut dire que si le processus part d'un ensemble mesurable $\Gamma(x)$ à fermeture connexe tel que $0<\nu(\Gamma(x))<1$, alors il doit quitter la fermeture de $\Gamma(x)$ avant $1/(\alpha\nu(\Gamma(x)^c))$ avec une probabilité supérieure à $1-\beta\nu(\Gamma(x))$. Sans perdre de généralité, nous pouvons considérer par la suite que $\Gamma(x)$ est fermé et connexe.

(H.2) Le noyau $K$ est à support compact et connexe, noté $[\rho_1, \rho_2]$, tel que $\rho_1\rho_2 < 0$. On suppose aussi que $K$ est minoré par $\varepsilon > 0$ sur le support et vérifie $\int_{\rho_1}^{\rho_2} K(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(H.3) $f(x)$ est continue et bornée. De plus $p(x,y)$ est bornée de classe $C^1$ telle que $|\partial p(x,y)/\partial x|$ soit bornée.

(H.4) Pour chaque $x$, on note $\Gamma_n(x) = ]x-\rho_2 h_n, x-\rho_1 h_n[$. Quand $n\to\infty$, $h_n \to 0$ de telle sorte que $n\nu(\Gamma_n(x))\cdot h_n \to \infty$.

On adopte aussi les notations suivantes : $K_{h_n} = \frac{1}{h_n}K(\frac{\cdot}{h_n})$, $Y_{ni}(y) = K_{h_n}(y - X_{i+1})$ et $W_{ni}(x) = (K_{h_n}(x-X_i))/\sum_{j=0}^n K_{h_n}(x-X_j)$. Ainsi $p_n(x,y)$ peut être représentée comme une moyenne pondérée des $Y_{ni}(y)$. De même, on pose :

$$I_1(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} E\left(\sum_{i=0}^n \left|W_{ni}(x)\right|^p \left|Y_{ni}(y) - p(X_i,y)\right|^p\right),$$

$$I_2(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} E\left(\left|\sum_{i=0}^n W_{ni}(x)p(X_i,y) - p(x,y)\right|^p\right).$$

A l'aide d'un calcul direct on montre

LEMME 1. – *Sous les hypothèses* (H.1)–(H.4)*, on a pour tout* $p \in ]1, +\infty[$,

$$I_1(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^p (n\nu(\Gamma_n(x)))^{p-1} h_n^{p-2}}\left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} K(y)^p\,\mathrm{d}y\right)^2\right).$$

LEMME 2. – *Sous les hypothèses* (H.1)–(H.4)*, on a pour tout* $p \in ]1, +\infty[$,

$$I_2(x) = \mathrm{O}\left(h_n^p \left(\beta\nu\left(\Gamma_n(x)\right)\right)^{n\nu(\Gamma_n(x))}\right).$$

THÉORÈME 1. – *Sous les hypothèses* (H.1)–(H.4)*, on a pour tout* $p \in ]1, +\infty[$,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} E\left|p_n(x,y) - p(x,y)\right|^p$$
$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^p(n\nu(\Gamma_n(x)))^{p-1}h_n^{p-2}}\left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} K(z)^p\,\mathrm{d}z\right)^2\right) + \mathrm{O}\left(h_n^p\left(\beta\nu\left(\Gamma_n(x)\right)\right)^{n\nu(\Gamma_n(x))}\right).$$

Pour la démonstration, on vérifie aisément que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} E\left|p_n(x,y) - p(x,y)\right|^p \leqslant I_1(x) + I_2(x).$$

Ce résultat peut être également exploité pour estimer l'opérateur de transition en tant que projecteur. En prenant

$$\begin{aligned} H^s : \mathrm{L}^p(\nu) &\longrightarrow \mathrm{L}^p(\nu)\\ g &\longmapsto \mathrm{H}^s(g) : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})\\ &\qquad x \longmapsto E\left(g(X_{t+s})/X_t = x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p(x,s,y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

et en utilisant $p_n(x,s,y)$, l'estimateur à noyau de $H^s(g(x))$ s'écrit

$$\widehat{H}_n^s\, g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,s,y)g(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Si $g$ est continue et si $K$ est un noyau de Rosenblatt, on sait que, d'après le lemme de Bochner (*voir* [2]), $\lim_{h_n\to 0} K_{h_n} * g = g$. En fixant $K_{h_n} * g$ à sa limite pour les points de continuité de $g$, on peut construire un autre estimateur de $H^s$ qui s'écrit

$$\widetilde{H}_n^s g(x) = \frac{\sum_{i=0}^n K_{h_n}(x - X_i)g(X_{i+s})}{\sum_{i=0}^n K_{h_n}(x - X_i)}. \tag{3}$$

L'estimateur $\widetilde{H}^s$ a été introduit par [5] et, depuis, abondament étudié et utilisé en prévision (*voir* [3] et [7] pour un accès aux références les plus récentes).

Par ailleurs, $p_n(x,s,y)$ peut être utilisé également pour construire l'estimateur à noyau $\widetilde{H}_n^{s*}g(x)$ de $H^{s*}g(x)$ où $H^{s*}$ est l'opérateur adjoint de $H^s$ ; i.e. $H^{s*} \in \mathcal{L}(L^q)$, tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. L'estimateur considéré s'écrit alors

$$\widehat{H}_n^{s*}\, g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,s,y)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

LEMME 3. – *Si la conditions* (H.1) *est verifiée, alors* $\exists\beta'$ ; $\beta' \leqslant \beta$ *tel que*

$$\forall y \in \Gamma(x), \quad \int_{\Gamma(x)} p(z,k,y)\,\mathrm{d}z \leqslant \beta'\nu\left(\Gamma(x)\right).$$

Ce lemme permet de justifier que les propriétés de l'estimateur $\widehat{H}_n^{s*}$ de $H^{s*}$ peuvent être déduites de celles $\widehat{H}_n^s$. Par la suite, nous considérons le cas $s = 1$ et nous notons $\widehat{H}_n^1 = \widehat{H}_n$, $\widehat{H}_n^{1*} = \widehat{H}_n^*$, $\widehat{H}^1 = \widehat{H}$ et $\widehat{H}^{1*} = \widehat{H}^*$.

THÉORÈME 2. – *Sous les hypothèses* (H.1)–(H.4)*, pour tout* $p \in ]1, +\infty[$*, on a*

$$E\left|\widehat{H}_n g(x) - Hg(x)\right|^p$$
$$= \mathrm{O}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon^p(n\nu(\Gamma_n(x)))^{p-1}h_n^{p-2}}\left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} K(y)^p\,\mathrm{d}y\right)^2 + \left(h_n^p\left(\beta\nu\left(\Gamma_n(x)\right)\right)^{n\nu(\Gamma_n(x))}\right)\right)\int_{\mathbb{R}} \left|g(z)\right|^p\mathrm{d}z\right]$$

*et en notant* $q = p/(p-1)$*, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&E\left|\widehat{H^*}_n g(y)-H^*g(y)\right|^q\\
&\quad=\mathrm{O}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon^q(n\nu(\Gamma_n(y)))^{q-1}h_n^{q-2}}\left(\int_{\rho_1}^{\rho_2}K(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(h_n^q\left(\beta'\nu\left(\Gamma_n(y)\right)\right)^{n\nu(\Gamma_n(y))}\right)\right)\int_{\mathbb{R}}\left|g(z)\right|^q\,\mathrm{d}z\right].
\end{aligned}
$$

Pour $p=1$, on montre facilement que les résultats s'étendent.

## Références bibliographiques


[1] D. Bosq, N. Cheze, Erreur quadratique asymptotique optimale de l'estimateur non paramétrique de la regression pour des observations discrétisées d'un processus stationnaire à temps continu, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 317 (1993) 891–894.

[2] D. Bosq, J.P. Lecoutre, Théorie de l'estimation fonctionnelle, Economica, Paris, 1987.

[3] D. Bosq, Nonparametric Statistics for Stochastic Processes, Lecture Notes in Statist., Vol. 110, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[4] G. Collomb, Propriétés de convergence presque complète du prédicteur à noyau, Z. Wahrscheinlichkeisttheorie verwandte Gebiete 66 (1984) 440–441.

[5] G. Collomb, P. Doukhan, Estimation non paramétrique de la fonction d'autorégression d'un processus stationnaire et $\varphi$-mélangeant : risques quadratiques par la méthode du noyau, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 296 (1983) 859–862.

[6] P. Doukhan, M. Ghindès, Estimation de la transition de probabilité d'une chaîne de Markov Doeblin-récurrente. Étude du cas du processus autorégressif général d'ordre 1, Stochastic Process Appl. 15 (1983) 271–293.

[7] F. Ferraty, P. Vieu, Statistique fonctionnelle : modèles de régression pour variables uni, multi et infiniment dimensionnées, Publ. LSP 2001-03, Toulouse, France, 2001.

[8] L. Gyorfi, W. Hardle, P. Sarda, P. Vieu, Nonparametric Curve Estimation for Time Series, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] M. Rosenblatt, Density estimates and Markov sequences, in: M. Puri (Ed.), Nonparametric Techniques in Statistical Inference, Cambridge University Press, Oxford, 1970.

[10] G. Roussas, Nonparametric estimation of the transition distribution function of a Markov process, Ann. Math. Statist. 40 (1969) 1386–1400.

[11] G. Roussas, Recursive estimation of the transition distribution function of a Markov process asymptotic normality, Statist. Probab. Lett. 11 (1991) 435–447.

[12] S. Yakowitz, Nonparametric density estimation, prediction and regression for Markov sequences, J. Amer. Statist. Assoc. 80 (1985) 215–221.

[13] S. Yakowitz, Nonparametric density and regression estimation for Markov sequences without mixing assumptions, J. Multivariate Anal. 30 (1989) 124–136.

[14] E. Youndjé, Propriétés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 41 (7–8) (1996) 535–566.