C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 983–988

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Viscoélastodynamique monodimensionnelle avec conditions de Signorini

Adrien Petrov, Michelle Schatzman

MAPLY, CNRS et Université Claude Bernard-Lyon 1, Mathématiques, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu et accepté le 8 avril 2002

Note présentée par Haïm Brezis.

Résumé Soit α un nombre strictement positif. Le problème viscoélastique monodimensionnel

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{xxt} = f, \quad x \in (-\infty, 0],\ t \in [0, +\infty),$$

avec les conditions au bord unilatérales

$$u(0, \cdot) \geqslant 0, \quad (u_x + \alpha u_{xt})(0, \cdot) \geqslant 0, \quad (u(u_x + \alpha u_{xt}))(0, \cdot) = 0,$$

peut être réduit à l'inéquation variationnelle suivante :

$$\lambda_1 * w = g + b, \quad w \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \langle w, b\rangle = 0.$$

Ici $\hat{\lambda}_1(\omega)$ est la détermination causale de $\mathrm{i}\omega\sqrt{1 + \mathrm{i}\alpha\omega}$. On démontre que ce problème possède une solution et que les pertes d'énergie sont purement visqueuses ; ce résultat provient de la relation $\langle \dot{w}, b\rangle = 0$, qui n'est pas triviale puisque, *a priori*, b est une mesure et $\dot{w}$ n'est définie que presque partout. ***Pour citer cet article : A. Petrov, M. Schatzman, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 983–988.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

One-dimensional viscoelastodynamics with Signorini boundary conditions

Abstract Let α be a positive number. The one-dimensional viscoelastic problem

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{xxt} = f, \quad x \in (-\infty, 0],\ t \in [0, +\infty),$$

with unilateral boundary conditions

$$u(0, \cdot) \geqslant 0, \quad (u_x + \alpha u_{xt})(0, \cdot) \geqslant 0, \quad (u(u_x + \alpha u_{xt}))(0, \cdot) = 0,$$

can be reduced to the following variational inequality:

$$\lambda_1 * w = g + b, \quad w \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \langle w, b\rangle = 0.$$

Here $\hat{\lambda}_1(\omega)$ is the causal determination of $\mathrm{i}\omega\sqrt{1 + \mathrm{i}\alpha\omega}$. We show that the energy losses are purely viscous; this result is a consequence of the relation $\langle \dot{w}, b\rangle = 0$; since *a priori*, b is a measure and $\dot{w}$ is defined only almost everywhere, this relation is not trivial. ***To cite***

Adresses e-mail : petrov@maply.univ-lyon1.fr (A. Petrov); schatz@maply.univ-lyon1.fr (M. Schatzman).

S1631-073X(02)02399-3/FLA

this article: A. Petrov, M. Schatzman, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 983–988.

Abridged English version

We seek solutions of viscoelastodynamics for a Kelvin–Voigt material with Signorini boundary conditions. In the simple case of a homogeneous isotropic material in a half-space $x \leqslant 0$ and of a solution depending only on the coordinate x, the only interesting equation is that for the first component of the displacement. After adimensionalization, it becomes

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{xxt} = f, \quad x < 0,\ t > 0,\ \alpha > 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u(0,\cdot) \geqslant 0, \quad (u_x + \alpha u_{xt})(0,\cdot) \geqslant 0, \quad \bigl(u(u_x + \alpha u_{xt})\bigr)(0,\cdot) = 0, \tag{2}$$

and initial data

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3}$$

Without loss of generality, we may assume that $u_0(0)$ vanishes; otherwise, we solve the problem with vanishing $(u_x + \alpha u_{xt})(0,\cdot)$ until $u(0,t)$ vanishes and we change the origin of times. Define λ_1 as the inverse Fourier transform of the causal determination of $\mathrm{i}\omega\sqrt{1+\alpha \mathrm{i}\omega}$; the problem (1), (2) and (3) is equivalent to the following problem on the boundary:

$$\lambda_1 * w = g + b, \quad g \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \langle g, b\rangle = 0. \tag{4}$$

Here g is equal to $-(\bar{u}_x + \alpha \bar{u}_{xt})(0,\cdot)$, where $\bar{u}$ is the solution of (1) and (3) with Dirichlet data. If u_0 and u_1 belong to $\mathrm{H}^2(-\infty,0) \cap \mathrm{H}^1_0(-\infty,0)$, and if f and f_t belong to $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); \mathrm{L}^2(0,\infty))$, then g belongs to $\mathrm{H}^{1/2}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$.

Observe that the principal term of λ_1 is a constant times the derivative of order $3/2$ of the Dirac mass; one could have thought that the difficulty of this problem is somewhere between the analogous problems

$$Lw = g + b, \quad w \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \langle w, b\rangle = 0,$$

with $\mathrm{L} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ as in [3] or with $\mathrm{L} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$ as in [7]. The pseudodifferential character of the convolution with λ_1 makes everything difficult; we thought at the beginning of this study that the viscous term might act as a regularization and make things simpler than for elastodynamics, where the Signorini problem is still wide open. It seems that this hope was not substantiated; nevertheless, we are at least able to provide a few results and proof techniques appropriate to the present frame work.

The existence of a solution of (4) can be obtained by the penalty method.

The energy balance is obtained by multiplying (1) by u_t and integrating over $(-\infty,0) \times (0,\tau)$; see (7); the losses are purely viscous iff $\langle \dot{w}, b\rangle$ vanishes. This statement looks trivial since $\dot{w}$ vanishes almost everywhere on the support of b; but it is not so, since b is only a measure, and we do not know that its singular part vanishes.

We prove indeed that $\dot{w}$ vanishes on the set $\{u = 0\}$, except on a countable subset, and that b has no atoms; in consequence, $\langle \dot{w}, b\rangle$ vanishes. However these results cannot be deduced from functional estimates on the penalized approximation, since they only imply that w is bounded in $\mathrm{H}^{5/4}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$.

Therefore, we develop another construction: we assume that g is the convolution of a measure ϕ with the kernel $1_{(0,\infty)}(t)/\sqrt{\pi t}$, i.e. g is a half-integral of ϕ; this is true if the data u_0, u_1 and f are smooth enough, as we have seen above. If ϕ is such that the supports of b and u are included in a locally finite union of intervals, we have an almost explicit formula for the solution (*see* (10) and (11)); in the general case, we construct an approximation w^n which has this local finiteness property; we are able to estimate

$(\dot{w}^n(\sigma - 0))^-$ for each σ such that $w^n(\sigma) > 0$; together with an order property and L^∞ estimates on w^n, this enables us to conclude.

---

1. L'origine du problème

Le système de la viscoélastodynamique pour un matériau de Kelvin–Voigt peut s'écrire

$$\rho \mathbf{u}_{tt} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}_t + f, \quad x \in \Omega,\ t \in (0, T),$$

avec des opérateurs A et B définis au moyen des tenseurs de Hooke ; dans ce cas, les conditions de Signorini s'écriront $\sigma_T^A + \dot{\sigma}_T^B = 0$, $\sigma_N^A + \dot{\sigma}_N^B \geqslant 0$, $\mathbf{u}_N \geqslant 0$, $\mathbf{u}_N(\sigma_N^A + \dot{\sigma}_N^B) = 0$. Ici, σ_N^C et σ_T^C désignent respectivement les composantes normales et tangentielles du tenseur des contraintes relativement à $C = A$ ou B.

Si le matériau est homogène et isotrope, et que nous cherchons une solution dans le demi-espace $x \leqslant 0$, ne dépendant que de la variable x, le problème se découple, et après avoir choisi les unités de manière appropriée, l'équation satisfaite par la première composante est (1), avec les conditions au bord (2) et les conditions initiales (3).

Rappelons que le problème de Signorini élastodynamique reste complètement ouvert en plus d'une dimension d'espace ; les premiers résultats monodimensionnels sont dus à Amerio [1,2], qui considérait plutôt un problème de vibrations avec obstacle ponctuel ; [6] a mis en évidence que ces derniers étaient identiques aux problèmes avec contraintes au bord, et surtout a traité le cas d'une équation des ondes avec contrainte unilatérale au bord d'un demi-espace, tout en montrant l'unicité et la conservation de l'énergie. D'autres articles ont abordé des problèmes mulitidimensionnels, notablement [5], et [4] qui ont obtenu des solutions faibles, sans information sur le bilan énergétique, ni sur les traces.

2. Réduction à un problème au bord

Si $\bar{u}$ est la solution du problème de Cauchy–Dirichlet pour les mêmes données initiales, on prouve par analyse de Fourier que $w(t) = u(0, t)$ vérifie les relations (4).

Nous montrons que si u_0 et u_1 appartiennent à $\mathrm{H}^2(-\infty, 0) \cap \mathrm{H}_0^1(-\infty, 0)$ et si f et f_t appartiennent à $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}([0, \infty); \mathrm{L}^2(-\infty, 0))$, alors g appartient à $\mathrm{H}^{1/2}_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$. Remarquons que la partie principale de λ_1 est une dérivée d'ordre $3/2$ de la masse de Dirac. L'existence d'une solution de (4) se prouve par pénalisation : la procédure d'itérations de Picard fournit une solution de

$$\lambda_1 * w^\varepsilon = g + \left(w^\varepsilon\right)^- / \varepsilon, \tag{5}$$

à support dans $\mathbb{R}^+$. Formellement, si on multiplie (5) par $\dot{w}^\varepsilon$ et qu'on intègre, on obtient une estimation sur la norme de w^ε dans $\mathrm{H}^{5/4}_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$; cette estimation peut être rendue rigoureuse, et nous montrons le

THÉORÈME 2.1. – *Si g appartient à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^{-1/4}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et est à support dans $\mathbb{R}^+$, il existe une fonction $w \in \mathrm{H}^{5/4}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant* (4)

$$\lambda_1 * w = g + b, \quad w \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \langle w, b \rangle = 0. \tag{6}$$

Idée de la démonstration. – Si l'on peut trouver $T > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $w^\varepsilon(t) \geqslant 0$ quand $t \geqslant T$, alors il est légitime de multiplier (5) par $\dot{w}^\varepsilon$ et d'intégrer puisqu'on peut montrer que $\dot{w}^\varepsilon$ décroît exponentiellement à l'infini. Si g est dans $\mathrm{L}^2(0, \infty)$, alors $\dot{w}^\varepsilon$ est borné dans $\mathrm{H}^{1/4}(0, \infty)$ uniformément en ε. Afin de se ramener à ce cas, on modifie g pour des temps très grands et on conclut par un procédé diagonal.

Remarquons qu'il est difficile d'aller au delà des estimations énoncées dans ce théorème ; en effet il est obtenu en mutipliant (5) par un facteur p^ε pour lequel $(\lambda_1 * w^\varepsilon, p^\varepsilon)$ est positif ou nul et on sait estimer $((w^\varepsilon)^-, p^\varepsilon)/\varepsilon$. Or le seul que nous ayons trouvé est $p^\varepsilon = \dot{w}^\varepsilon$.

3. Bilan d'énergie

Si nous multiplions (1) par u_t et que nous l'intégrons sur $(-\infty, 0] \times [0, \tau]$, nous obtenons formellement la relation

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\big(u_x^2 + u_t^2\big)(\cdot,\tau)\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\tau} u_{xt}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\big(\big|u_t(\cdot,0)\big|^2 + \big|u_x(\cdot,0)\big|^2\big)\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{0} f u_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^{\tau}\big((u_x + \alpha u_{xt})u_t\big)(0,\cdot)\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Les pertes d'énergies sont purement d'origine visqueuse si et seulement si le dernier terme intégral est nul. Par construction, $(u_x + \alpha u_{xt})(0,\cdot) = \lambda_1 * w - g$; par conséquent, il nous faut montrer que $\langle \dot{w}, b\rangle$ s'annule si nous voulons comprendre le bilan d'énergie.

Une vision naïve consisterait à dire que comme $\dot{w}$ est nul sur le support de b, il est clair que $\langle \dot{w}, b\rangle$ s'annule. Mais, de fait, $\dot{w}$ n'est nul que presque partout, et nous ne savons pas si b est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par conséquent l'annulation de $\langle \dot{w}, b\rangle$ n'est pas triviale, et elle repose sur une construction en plusieurs étapes, demandant une certaine régularité sur g. L'hypothèse fondamentale est que g est une demi-primitive d'une mesure ϕ sur $\mathbb{R}$ à support dans $\mathbb{R}^+$; plus précisément, et en notant $\int_I f\phi$ l'intégrale relativement à la mesure ϕ sur un intervalle I d'une fonction f ϕ-intégrable, nous supposons :

$$g(t) = \int_{[0,t[}\big(\pi(t-s)\big)^{-1/2}\phi(s). \tag{8}$$

Soit w une solution de (4) possédant une structure localement finie, c'est-à-dire :

$$\operatorname{supp} w \subset \bigcup_{j\in J}[\sigma_j,\tau_j], \qquad \operatorname{supp} b \subset \bigcup_{j\in J}[\tau_j,\sigma_{j+1}],$$

avec $0 \leqslant \sigma_0 < \tau_0 < \sigma_1 < \tau_1 \cdots$; notons H la fonction de Heaviside et posons $\omega(t) = H(t)/(\pi(t+1)\sqrt{t})$, $\nu(t) = H(t)\,\mathrm{e}^{-t/\alpha}/\alpha$ et $\Omega(t) = \int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s$.

Alors un calcul explicite fournit l'expression suivante de w :

$$w 1_{[\sigma_j,\tau_j]} = (H * \nu * \phi_j)1_{[\sigma_j,\tau_j]}, \tag{9}$$

et la suite des ϕ_j est construite à partir de $\phi_0 = \phi$ par récurrence :

$$\psi_j = \phi_j 1_{[\tau_j,\sigma_{j+1})} + \delta(\cdot - \tau_j)\,\mathrm{e}^{-\tau_j/\alpha}\int_{[\sigma_j,\tau_j)}\mathrm{e}^{s/\alpha}\phi_j, \tag{10}$$

$$\phi_{j+1} = 1_{[\sigma_{j+1},\infty)}\phi_j + 1_{[\sigma_{j+1},\infty)}\int_{[\tau_j,\sigma_{j+1})}\exp\Big(-\frac{\cdot - s}{\alpha}\Big)\omega\Big(\frac{\cdot - \sigma_{j+1}}{\sigma_{j+1} - s}\Big)\frac{\psi_j(s)}{\sigma_{j+1} - s}. \tag{11}$$

Cette formule conduit à l'estimation suivante, en un point σ où $w(\sigma)$ est strictement positif :

$$\big(\dot{w}(\sigma - 0)\big)^- \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{[\sigma_j,\sigma)}\big|\phi_0(s)\big| + \sum_{i=1}^{j}\int_{[\tau_{i-1},\sigma_i)}\big(2\,\mathrm{e}^{(\sigma-\sigma_j)/\alpha} - 1\big)G(\sigma,s,i,j)\psi_{i-1}^{+}(s), \tag{12}$$

où nous avons posé $G(\sigma,s,i,j) = \Omega((\sigma-\sigma_i)/(\sigma_i - s)) - \Omega((\sigma_j - \sigma_i)/(\sigma_i - s))$.

D'autre part, elle nous permettra ultérieurement de trouver une estimation de la norme de $\dot{w}$ dans L^∞.

4. Approximation par des solutions à structure localement finie

Cependant nous n'avons aucune garantie d'existence d'une solution à structure localement finie pour des données g quelconques satisfaisant l'hypothèse (8). Nous construisons alors récursivement une suite possédant cette structure. Tout d'abord, soit τ_{-1} la borne inférieure du support de ϕ, et soit σ_0 la borne inférieure du support de $(H*\nu*\phi)^+$; si $\sigma_0=\tau_{-1}$, posons $\phi_0=\phi$; si $\sigma_0>\tau_{-1}$, nous définissons ϕ_0 par

$$\phi_0=1_{[\sigma_0,\infty)}\left(\phi+\int_{[\tau_{-1},\sigma_0)}\exp\left(-\frac{\cdot-s}{\alpha}\right)\omega\left(\frac{\cdot-\sigma_0}{\sigma_0-s}\right)\frac{\phi(s)}{\sigma_0-s}\right);$$

alors $w_0=w1_{[\sigma_0,\infty)}$ résout le problème

$$\lambda_1*w_0=\mu*\phi_0+g_0,\quad \mu*\phi_0\geqslant 0,\ w_0\geqslant 0,\ \langle\mu*\phi_0,w_0\rangle=0$$

et la borne inférieure du support de ϕ_0 est égale à σ_0. Posons $\tilde\phi_0^n=\phi_0$ et $\sigma_0^n=\sigma_0$; si la borne inférieure du support de $(H*\nu*\tilde\phi_0^n)^-$ est strictement supérieure à σ_0^n, nous l'appelons τ_0^n et nous posons $\phi_0^n=\tilde\phi_0^n$. Sinon, nous pouvons trouver un instant τ_0^n dans $]\sigma_0^n,\sigma_0^n+1/n]$ pour lequel $H*\nu*\tilde\phi_0^n$ s'annule, alors que $(\nu*\tilde\phi_0^n)(\tau_0^n-0)$ est négatif ou nul, et nous posons

$$\phi_0^n=\delta(\cdot-\sigma_0^n)\int_{[\sigma_0^n,\tau_0^n)}(\tilde\phi_0^n)^+-\delta(\cdot-\tau_0^n)\int_{[\sigma_0^n,\tau_0^n)}(\tilde\phi_0^n)^-+\phi_0^n1_{[\tau_0^n,\infty)}.$$

Soit alors ϕ_j^n une mesure dont le support a même borne inférieure que celui de $(H*\nu*\phi_j^n)^+$, et soit

$$\tau_j^n=\inf\operatorname{supp}\big(H*\nu*\phi_j^n\big)^-.$$

Si $\tau_j^n=\infty$, la construction s'arrête ; par construction $\tau_j^0>\sigma_j^0$, et il est possible de montrer que $\tau_j^n>\sigma_j^n$ pour tout j. La mesure $\tilde\psi_j^n$ est donnée par (10) avec chacune des quantités affectée d'un indice n en haut. Soit $\tilde\sigma_{j+1}^n$ la borne inférieure du support de $(\tilde\sigma_j^n)^+$; si $\tilde\sigma_{j+1}^n=\infty$, la construction s'arrête ; si $\tilde\sigma_{j+1}^n$ est fini, nous prenons pour σ_{j+1}^n n'importe quel instant ne portant pas d'atome de $\tilde\psi_j^n$ et tel que

$$\max\left(\tilde\sigma_{j+1}^n,\tau_j^n+\frac{1}{2n}\right)\leqslant\sigma_{j+1}^n\leqslant\max\left(\tilde\sigma_{j+1}^n,\tau_j^n+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n},$$

et nous posons

$$\psi_j^n=-1_{[\tau_j^n,\sigma_{j+1}^n)}(\tilde\psi_j^n)^-+\delta(\cdot-\sigma_{j+1}^n)\int_{[\tau_j^n,\sigma_{j+1}^n)}(\tilde\psi_j^n)^++1_{[\sigma_{j+1}^n,\infty)}\tilde\psi_j^n.$$

Alors ϕ_{j+1}^n peut être déduit de ψ_j^n à partir de (11), lui aussi affecté d'indices n en haut. La fonction $w^n=\sum_{j\geqslant0}1_{[\sigma_j^n,\tau_j^n]}(H*\nu*\phi_j^n)$ est la solution de

$$\lambda_1*w^n=g^n+b^n,\quad w^n\geqslant 0,\ b^n\geqslant 0,\ \langle w^n,b^n\rangle=0$$

avec

$$g^n=\mu*\left(\phi+(\phi_0^n-\phi)1_{[\sigma_0^n,\tau_0^n)}+\sum_{j\geqslant0}\left(\delta(\cdot-\sigma_{j+1}^n)\int_{[\tau_j^n,\sigma_{j+1}^n)}(\tilde\psi_j^n)^+-1_{[\tau_j^n,\sigma_{j+1}^n)}(\tilde\psi_j^n)^+\right)\right).$$

Si nous supposons que ϕ est de masse finie, nous montrons que les masses de ϕ_{j+1}^n et de ψ_{j+1}^n sont bornées indépendamment de n et j, et que l'on a des propriétés d'ordre suffisantes pour passer à la limite :

LEMME 4.1. – *Les inégalités suivantes ont lieu* :

$$\int|\phi_{j+1}^n|\leqslant\int|\psi_j^n|\leqslant\int|\phi_j^n|,\tag{13}$$

$$(\phi_{j+1}^n)^+\leqslant 1_{[\sigma_{j+1}^n,\infty)}(\phi_j^n)^++\delta(\cdot-\sigma_{j+1}^n)\int_{[\tau_{j+1}^n,\sigma_{j+1}^n)}(\phi_j^n)^+.\tag{14}$$

Nous déduisons de (13) que g^n tend vers g dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p\in[1,2[$, que $\dot w^n$ est bornée dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ et que b^n est d'intégrale bornée sur $\mathbb{R}$. Enfin, w^n converge uniformément vers w sur tout compact, après extraction d'une sous-suite, et la limite vérifie (4) : les estimations ainsi obtenues sont meilleures que celles obtenues via la pénalisation.

En particulier, comme $\dot w$ est essentiellement bornée, b ne peut avoir d'atomes. Par ailleurs, nous utilisons la propriété (12) pour montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. – *Soit N l'ensemble des atomes de ϕ et soit N_1 l'ensemble des extrémités des composantes connexes de $U = \{t \in \mathbb{R} : w(t) > 0\}$. Alors $w(t)$ est différentiable en tout point qui n'appartient pas à $N \cup N_1 \cup U$, et sa dérivée est nulle.*

Idée de la démonstration. – Si $w(t)$ est nul et t n'est pas l'extrémité d'une composante connexe de $U = \{w > 0\}$, le cas où il y a quelque chose à démontrer est celui où t est une valeur d'adhérence de U. Si t est une valeur d'adhérence à droite et s'il n'est pas vrai que $\dot{w}(t)$ est nul, on peut trouver $\beta > 0$ et une suite t_m croissant vers t telle que $w(t_m) \geqslant \beta(t - t_m)$. Alors pour tout n assez grand, $w^n(t_m)$ est plus grand que $3\beta(t - t_m)/4$; si $]\sigma^n, \tau^n[$ est la composante connexe de t_m dans $\{w^n > 0\}$, on voit qu'il existe un ensemble de mesure non nulle dans $]\sigma^n, \tau^n[$ sur lequel $\dot{w}^n \leqslant -3\beta/4$; mais en vertu de (14) et de (12), on obtient une contradiction. Le cas où t est un point d'accumulation à gauche est traité de façon analogue, bien qu'un peu plus simple.

Ce résultat suffit à conclure que $\dot{w}|_{U^c}$ est nul sauf sur un ensemble dénombrable de points et par conséquent $\langle b, \dot{w}\rangle$ s'annule.

Remarque 1. – Nous ne savons rien de l'unicité des solutions ; nous ne savons même pas si les deux constructions d'une solution de (4) fournissent le même résultat.

Références bibliographiques

[1] L. Amerio, Su un problem di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea delle corda vibrante, Publ. I. A. C. Serie III 109 (1976).

[2] L. Amerio, On the motion of a string vibrating through a moving ring with a continuously variable diameter, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 62 (2) (1977) 134–142.

[3] M.G. Crandall, A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Funct. Anal. 3 (1969) 376–418.

[4] J. Jarušek, Remark to dynamic contact problems for bodies with a singular memory, Comment. Math. Univ. Carolin. 39 (3) (1998) 545–550.

[5] J.U. Kim, A boundary thin obstacle problem for a wave equation, Comm. Partial Differential Equations 14 (8–9) (1989) 1011–1026.

[6] G. Lebeau, M. Schatzman, A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary, J. Differential Equations 53 (3) (1984) 309–361.

[7] M. Schatzman, Le système différentiel $(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2) + \partial\varphi(u) \ni f$ avec conditions initiales, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A–B 284 (11) (1977) A603–A606.