C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1043–1046

Théorie des nombres/*Number Theory*

Systèmes de numération et automates

Ali Messaoudi

Departamento de Matemática, FEIS-UNESP, Av Brasil, 56 Caixa Postal 31, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil

Reçu le 2 avril 2002 ; accepté le 4 avril 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé Soit β un entier algébrique et hyperbolique de module strictement supérieur à 1. Considérons A un sous ensemble fini de $\mathbb{Q}[\beta]$ et $D_\beta = \{(a_i, b_i)_{i \geqslant 0} \in (A \times A)^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{\infty} a_i \beta^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \beta^{-i}\}$. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que D_β soit sofique. Comme conséquence, nous obtenons un résultat de Thurston (*voir* Corollaire 1). Nous traiterons aussi le cas où l'ensemble des chiffres A est donné par l'algorithme glouton et nous étudierons le lien avec le β-shift. ***Pour citer cet article : A. Messaoudi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1043–1046.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Numeration systems and automata

Abstract Let β be an hyperbolic algebraic integer of modulus greater than 1. Let A be a finite set of $\mathbb{Q}[\beta]$ and $D_\beta = \{(a_i, b_i)_{i \geqslant 0} \in (A \times A)^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{\infty} a_i \beta^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \beta^{-i}\}$. We give a necessary and sufficient condition for D_β to be sofic. As a consequence, we obtain a result due to Thurston (*see* Corollary 1). We also treat the case where the set of digits A is given by the greedy algorithm and study the connection with the β-shift. ***To cite this article: A. Messaoudi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1043–1046.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit X un ensemble fini et non vide. Soient X^* l'ensemble des mots finis sur X, muni de l'opération de concaténation, et $X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies à termes dans X. Nous identifions une suite $(c_n)_{n \geqslant 0}$ (resp. une suite finie $(c_n)_{k \leqslant n \leqslant p}$) avec un mot infini $c_0 c_1 \cdots$ (resp. un mot fini $c_k \cdots c_p$). Un *automate* sur X est la donnée d'un graphe orienté noté $\mathcal{A} = (V, X, E, I, T)$, avec des flèches étiquetées par les éléments de X où V est l'ensemble des sommets, appelés états, $I \subset V$ est l'ensemble des états initiaux, $T \subset V$ est l'ensemble des états terminaux et $E \subset V \times X \times V$ est l'ensemble des flèches étiquetées. L'automate est dit fini si V est fini. Les automates considérés dans cette note n'ont pas d'états terminaux. Soit $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$, nous dirons que l'automate $\mathcal{A}$ *reconnaît* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite d'états $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que q_0 est un état initial et pour tout $n \geqslant 1$, $(q_{n-1}, a_n, q_n) \in E$. Soit $1 \leqslant k \leqslant p$. Une suite $(q_{n-1}, a_n, q_n)_{n \geqslant k}$ (resp. $(q_{n-1}, a_n, q_n)_{k \leqslant n \leqslant p}$) est appelée un *chemin* de l'automate (resp. chemin fini) si pour tout $n \geqslant k$ (resp. $k \leqslant n \leqslant p$) on a $(q_{n-1}, a_n, q_n) \in E$. Les états q_n sont appelés *les sommets* du chemin et nous dirons que la suite d'états $(q_n)_{n \geqslant k-1}$ (resp. $(q_n)_{k-1 \leqslant n \leqslant p}$) *donne* la suite $(a_n)_{n \geqslant k}$ (resp. $(a_n)_{k \leqslant n \leqslant p}$). Nous dirons aussi que $(a_n)_{n \geqslant k}$ (resp. $(a_n)_{k \leqslant n \leqslant p}$) *commence* à l'état q_{k-1}. Si $(q_{n-1}, a_n, q_n)_{k \leqslant n \leqslant p}$ est un chemin fini de l'automate, alors l'état q_p est appelé *sommet final* du chemin.

Adresse e-mail : messaoud@fqm.feis.unesp.br (A. Messaoudi).

S1631-073X(02)02411-1/FLA

Un sous-ensemble Y de $X^{\mathbb{N}}$ est dit *sofique* s'il existe un automate fini tel que Y soit exactement l'ensemble des suites reconnaissables par l'automate.

Soit β un entier algébrique hyperbolique de module strictement supérieur à 1 et de degré $d \geqslant 2$. Soient $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_m$ ses conjugués (racines du polynôme minimal de β) de module strictement supérieur à 1, et $\beta_{m+1}, \ldots, \beta_d$ ses conjugués de module strictement inférieur à 1. Considérons A un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}[\beta]$. Définissons $D_\beta = \{(a_i, b_i)_{i\geqslant 0} \in (A \times A)^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{\infty} a_i \beta^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \beta^{-i}\}$.

THÉORÈME 1. – *L'ensemble D_β est sofique si et seulement si pour tout $(a_i, b_i)_{i\geqslant 0} \in D_\beta$, on a $(\sigma_j(a_i), \sigma_j(b_i))_{i\geqslant 0} \in D_{\beta_j}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, où $\sigma_j : \mathbb{Q}[\beta] \mapsto \mathbb{Q}[\beta_j]$ est l'isomorphisme qui fixe $\mathbb{Q}$ et transforme β en β_j.*

LEMME 1. – *L'ensemble D_β est sofique si et seulement si l'ensemble*

$$V = \bigcup_{(a_i,b_i)_{i\geqslant 0} \in D_\beta} \left\{ \beta^k \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)\beta^{-i} \mid k \geqslant 0 \right\}$$

est fini.

Démonstration. – Construisons un automate $\mathcal{A}$ qui reconnaît D_β de la manière suivante. Soit $(a_i, b_i)_{i\geqslant 0} \in D_\beta$. Posons pour tout $k \geqslant 0$, $A_k = \beta^k \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)\beta^{-i}$. Nous avons

$$A_{k+1} = \beta A_k + (a_{k+1} - b_{k+1}), \quad \forall k \geqslant 0. \tag{1}$$

Soit s le plus petit entier tel que $a_s \neq b_s$. Alors $A_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ et $A_s = a_s - b_s$. Si A_s appartient à V, nous joignons 0 à A_s par une flèche que nous étiquetons par (a_s, b_s). En faisant $k = s$ dans la relation (1), nous obtenons une équation dont l'inconnue est $(A_{s+1}, a_{s+1}, b_{s+1}) \in V \times A \times A$. Comme A et V sont finis, cette équation a un nombre fini de solutions. Si (x, a, b) est une solution de l'équation, nous mettons une flèche de A_s à x et nous l'étiquetons par (a, b). En continuant de la même façon, le procédé s'arrête et nous obtenons un automate fini et déterministe qui reconnaît D_β. Ses états sont les éléments de V et son état initial est 0.

D'autre part, supposons que l'ensemble V est infini et que D_β est sofique. Si $q \in V$, posons $F_q(D_\beta) = \{(c_i)_{i\geqslant 0} \in (A \times A)^{\mathbb{N}} \mid (c_i)_{i\geqslant 0}$ commence à l'état $q\}$. Soient $q, q' \in V$. Soit $(c_i)_{i\geqslant 0} \in F_q(D_\beta) \cap F_{q'}(D_\beta)$, où $c_i = (a_i, b_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soient (A_n) et (B_n) deux suites d'états qui donnent $(c_i)_{i\geqslant 0}$ où $A_0 = q$ et $B_0 = q'$. Par (1), on obtient

$$B_{n+1} - A_{n+1} = \beta^{n+1}(B_0 - A_0) \tag{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme les suites (A_n) et (B_n) sont bornées et $|\beta| > 1$, on a $A_i = B_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Donc

$$\forall q,\ q' \in V,\ q \neq q' \quad \Longrightarrow \quad F_q(D_\beta) \cap F_{q'}(D_\beta) = \emptyset. \tag{3}$$

Par conséquent, l'ensemble $\{F_q(D_\beta) \mid q \in V\}$ est infini.

Par ailleurs, soit $L(D_\beta)$ l'ensemble des mots $v \in (A \times A)^*$ tels qu'ils existent $u \in (A \times A)^*$ et w un mot infini sur $A \times A$ satisfaisant $uvw \in D_\beta$. Étant donné $v \in L(D_\beta)$, posons $F_v(D_\beta) = \{w \mid \exists u \in (A \times A)^*, uvw \in D_\beta\}$. Alors, nous prétendons que l'ensemble $C = \{F_v(D_\beta) \mid v \in L(D_\beta)\}$ est infini et nous en donnons la preuve dans les trois prochains paragraphes.

De la relation (2), nous déduisons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que tout mot fini de $L(D_\beta)$ de longueur $\geqslant N$ est donné par un unique chemin fini de l'automate.

Soit X_N l'ensemble des mots infinis w sur $A \times A$ tel qu'il existe un mot fini $u \in (A \times A)^*$ de longueur $\geqslant N$ satisfaisant $uw \in D_\beta$. Soit Q l'ensemble des $q \in V$ tels que q soit un sommet d'un chemin infini qui donne au moins un $w \in X_N$. L'ensemble Q est nécessairement infini car V l'est.

Soient q et q' deux éléments distincts de Q, alors il existe deux éléments distincts v et v' de $L(D_\beta)$ et de longueur $\geqslant N$ tels que v (resp. v') est donné par une suite d'états dont l'état initial est 0 et le dernier état est q (resp. q') ($v \neq v'$ est garanti par le fait que l'automate soit déterministe). Supposons que $F_v(D_\beta) = F_{v'}(D_\beta)$. En vertu de la relation (3), il existe un chemin fini de l'automate qui donne le mot v (resp. v') et qui finit par l'état q' (resp. q). D'où $q = q'$. Absurde. Par conséquent C est infini.

Par ailleurs, comme D_β est sofique, il existe un automate fini $\mathcal{B}$ tel que D_β soit exactement l'ensemble des suites reconnaissables par $\mathcal{B}$. Soit $v \in L(D_\beta)$. Considérons tous les chemins finis de $\mathcal{B}$ qui donnent v. Soit T_v l'ensemble des sommets finaux de ces chemins. Donc $F_v(D_\beta)$ est l'ensemble des mots infinis dans $\mathcal{B}$ commençant à partir d'un élément de T_v. Par conséquent deux mots v et v' tels que $T_v = T_{v'}$ satisfont $F_v(D_\beta) = F_{v'}(D_\beta)$. Comme il n y a qu'un nombre fini de sommets dans $\mathcal{B}$, l'ensemble C est fini. Absurde. $\square$

Démonstration du Théorème 1. – Comme A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}[\beta]$. Il existe $c \in \mathbb{Z}^*$ tel que pour tout $a \in A$, ca est entier algébrique de $\mathbb{Q}$. De plus, $(a_i, b_i)_{i \geqslant 0}$ appartient à D_β si et seulement si $\sum_{i=0}^{\infty} ca_i\beta^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} cb_i\beta^{-i}$. On peut donc supposer que les éléments de A sont des entiers algébriques.

L'implication directe est facile en utilisant le Lemme 1.

Soient $(a_i, b_i)_{i \geqslant 0} \in D_\beta$ et $k \in \mathbb{N}$. Un conjugué de $A_k = \beta^k \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i)\beta^{-i}$ est de la forme $(A_k)_j = \sigma_j(\beta)^k \sum_{i=0}^{k}(\sigma_j(a_i) - \sigma_j(b_i))\sigma_j(\beta)^{-i}$.

Si $|\sigma_j(\beta)| < 1$, alors

$$\left|(A_k)_j\right| \leqslant 2l/\left(1 - \left|\sigma_j(\beta)\right|\right),$$

où $l = \max\{|\sigma_j(z)| \mid z \in A\}$. D'autre part, si $|\sigma_j(\beta)| > 1$ alors on a $(A_k)_j = \sum_{i=k+1}^{+\infty}(\sigma_j(b_i) - \sigma_j(a_i))\sigma_j(\beta)^{k-i}$, car $(\sigma_j(a_i), \sigma_j(b_i))_{i \geqslant 0}$ appartient à D_{β_j}.

Donc

$$\left|(A_k)_j\right| \leqslant 2l/\left(\left|\sigma_j(\beta)\right| - 1\right).$$

Par conséquent il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $j = 1, \ldots, d$ et pour tout entier naturel k, on a $|(A_k)_j| \leqslant M$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ le nombre A_k est un entier algébrique sur $\mathbb{Q}$, l'ensemble $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Et le Lemme 1 implique le résultat. $\square$

COROLLAIRE 1 ([6]). – *Si β est un nombre de Pisot, alors D_β est sofique.*

Chaque élément de V est un sommet d'un chemin de $\mathcal{A}$. De plus pour tout $q, q' \in V$, si $F_q(D_\beta) = F_{q'}(D_\beta)$ alors $q = q'$ (*voir* la preuve du Lemme 1). Par un résultat d'Eilenberg (*voir* [3], p. 49), nous déduisons que $\mathcal{A}$ est minimal (au sens où il a le plus petit nombre d'états parmi tous les automates déterministes qui reconnaissent D_β).

Par ailleurs, soit $\prec$ une relation d'ordre sur A et $\prec_{\text{lex}}$ l'ordre lexicographique induit par $\prec$ sur $A^{\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{E}_\beta = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i\beta^{-i} \mid a_i \in A, \ \forall i \geqslant 0\}$ et $x \in \mathcal{E}_\beta$. Nous appelons *β-représentation* de x, une suite $(a_i)_{i \geqslant 0} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\beta^{-i}$.

Nous appelons *β-développement* de x la plus grande β-représentation de x pour l'ordre lexicographique. Soit S_β l'ensemble des éléments $(a_i)_{i \geqslant 0}$ de $A^{\mathbb{N}}$ tels que pour $k \in \mathbb{N}$ le mot $a_0 \cdots a_k$ est le début d'un β-développement.

Un lien entre D_β et S_β est donné par la proposition suivante (*voir* [4,5]).

PROPOSITION 1. – *Si D_β est sofique alors S_β l'est aussi.*

Si $y \in \mathbb{R}$, notons par $[y]$ et $\{y\}$ respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de y. Supposons que β est un nombre réel strictement supérieur à 1 et $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$ si β est un entier, ou $A = \{0, \ldots, [\beta]\}$ sinon. Munissons A de l'ordre naturel et construisons des β-développements de la façon suivante (algorithme glouton). Soit $x \in [0, 1]$. Posons $x_1 = [\beta x]$ et $r_1 = \{\beta x\}$. Itérons pour $i \geqslant 2$, $x_i = [\beta r_{i-1}]$ and $r_i = \{\beta r_{i-1}\}$. Nous obtenons $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\beta^{-i}$. Les chiffres x_i appartiennent à A. L'ensemble S_β associé aux β-développements obtenus par l'algorithme glouton est appelé β-shift. Considérons la transformation T_β définie par $T_\beta(x) = \beta x \pmod 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. Soit le mot infini

$d(1,\beta)=t_1t_2\cdots$, où $t_k=[\beta T_\beta^{k-1}(1)]$ pour tout $k\geqslant 1$. Nous avons $1=\sum_{k=1}^{+\infty} t_k\beta^{-k}$. Il est connu que le β-shift S_β est sofique si et seulement si $d(1,\beta)$ est ultimement périodique (*voir* [1] et [2]).

PROPOSITION 2. – *Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1. Soit $A=\{0,\ldots,\beta-1\}$ si β est un entier, ou $A=\{0,\ldots,[\beta]\}$ sinon. Alors l'ensemble D_β est sofique si et seulement si le β-shift S_β l'est aussi.*

Démonstration. – En vertu de la Proposition 1, il suffit de montrer l'implication réciproque. Soit $(a_i,b_i)_{i\geqslant 0}\in D_\beta$ tel que $a_0<b_0$. Il est facile de montrer que $b_0=a_0+1$, $b_i=0$ pour tout $i\geqslant 1$ et $a_1a_2\cdots=d(1,\beta)$. Comme $d(1,\beta)$ est ultimement périodique, il existe un entier m tel que

$$\bigcup_{(a_i,b_i)\in D_\beta}\left\{\beta^k\sum_{i=0}^{k}(a_i-b_i)\beta^{-i}\mid k\geqslant 0\right\}=\left\{\pm\sum_{n=i}^{+\infty}\frac{a_n}{\beta^{n+1-i}}\mid i=1,\ldots,m\right\}.$$

Donc, en vertu du Lemme 1 nous obtenons le résultat. □

Références bibliographiques

[1] F. Blanchard, β-expansions and symbolic dynamics, Theoret. Comput. Sci. 65 (1989) 131–141.
[2] A. Bertrand, Développement en base θ, répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geqslant 0}$, langages codés et θ-shift, Bull. Soc. Math. France 114 (1986) 271–323.
[3] S. Eilenberg, Automata, Languages, and Machines, Vol. 1, Academic Press, New York, 1974.
[4] A. Messaoudi, Autour du fractal de Rauzy, Thèse de l'Université de la Méditérranée, Aix-Marseille II, 1996.
[5] A. Messaoudi, Double expansions and automata, soumis.
[6] W.P. Thurston, Groups, Tilings, and Finite State Automata, Amer. Math. Soc. Colloq. Lectures, 1990.