

# Partie irrégulière des solutions pour une équation linéaire aux $q$ -différences

Abderrahman Essadiq

Université bnu Tofail, Faculté des sciences, BP 1018, Kenitra 14000, Maroc

Reçu et accepté le 6 mai 2002

Note présentée par Bernard Malgrange.

---

## Résumé

Le but principal de cette Note est, en s'inspirant du cas différentiel [1], d'établir une nouvelle approche de calcul de solutions d'équation linéaire aux  $q$ -différences au voisinage du point singulier irrégulier 0 par le biais d'un procédé de redressement de la pente, différent de celui utilisé par Marotte et Zhang dans [3], de ce qu'on appellera  $D_q$ -polygone de Newton associé à l'équation linéaire aux  $q$ -différences. Ainsi, on déterminera de manière explicite la partie la plus irrégulière d'une solution formelle. *Pour citer cet article : A. Essadiq, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 139–144.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Irregular part of solutions for a linear $q$ -difference equation

## Abstract

The goal of this Note is to give a new method of resolution for a linear  $q$ -difference equation in a neighborhood of the irregular singularity 0, different from the one Marotte and Zhang used in [3]. We will explicitly determined the mostly irregular part for a formal solution of a linear  $q$ -difference equation. *To cite this article: A. Essadiq, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 139–144.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

Let  $D_q$  stand for the usual  $q$ -derivative, acting on functions  $f(x)$  by (1). We consider the linear  $q$ -difference equation associated to the operator given by (2), we suppose that 0 is an irregular singularity of the above  $q$ -difference equation and  $p$  is the greatest slope of the  $D_q$ -Newton polygon which is the convex hull of the set defined by (3).

The aim of this Note is given by the theorem below.

**THEOREM.** – *A formal solution of the linear  $q$ -difference equation associated to the operator (2), in a neighborhood of the irregular singularity 0 is given by (5). There,  $z(x)$  is a Fuchs type solution of the  $q$ -difference operator given by (4) and  $\varphi_p^\lambda(x, q)$  is the mostly irregular part given as follows:*

$$\varphi_p^\lambda(x, q) = \frac{1}{\exp_{q^p}(q^{p\lambda}/([p]_q x^p))}.$$

### 1. Introduction

Tout au long de cette Note,  $q$  est un paramètre réel strictement compris entre 0 et 1. Nous désignerons par  $\mathbb{C}((x))^*$  le corps des séries formelles de Puiseux à coefficients dans le corps  $\mathbb{C}$ . Soit  $L$  un élément de  $\mathbb{C}((x))^*[D_q]$ .  $D_q$  désigne la dérivation au sens de Jackson [4] donnée par :

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q - 1)x}. \tag{1}$$

On pose

$$L = \sum_{j=0}^n a_j(x) D_q^j, \tag{2}$$

$$a_j = \sum_{i=-p_j}^{+\infty} a_{ji} t^i, \quad t^m = x, \quad m \in \mathbb{N}^*,$$

$$a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Par analogie avec l'étude des équations différentielles linéaires à singularités irrégulières [1,2], on considère le problème de la détermination de la partie la plus irrégulière d'une solution formelle de l'équation linéaire aux  $q$ -différences associée à l'opérateur (2) au voisinage de la singularité irrégulière 0. Nous commencerons par rappeler quelques définitions et notions qui seront utiles pour la suite de l'exposé et préciserons le choix des briques de base de la méthode que nous exposerons dans la présente Note.

Dans la suite de ce travail, on supposera que 0 est racine de  $a_n(x) = 0$  et qu'il existe au moins un  $j$  tel que  $a_j(0)$  soit non nul. En s'inspirant du cas différentiel et de la définition donnée par Ramis [5] du polygone de Newton, on définira pour un opérateur aux  $q$ -différences  $L$  la notion du  $D_q$ -polygone de Newton de  $L$  en zéro. En travaillant avec l'opérateur  $\Lambda_\alpha = x^{\alpha+1} D_q$  (et non avec l'opérateur d'homothétie  $\sigma_q$  comme le fait Zhang dans [6]) on retrouve une notion de point singulier (régulier ou irrégulier) caractérisable comme dans le cas différentiel par des propriétés géométriques du  $D_q$ -polygone de Newton.

### 2. Classification des singularités et $D_q$ -polygone de Newton

Soit  $L$  un opérateur linéaire aux  $q$ -différences de la forme  $L = \sum_0^n a_i(x) D_q^i$  où  $a_i(x)$  appartient à l'anneau des séries formelles  $\mathbb{C}[[X]]$ . Avant de définir le  $D_q$ -polygone de Newton de  $L$  en zéro, nous avons besoin d'introduire quelques notations, que nous donnerons dans le cadre des opérateurs à coefficients dans l'algèbre  $\mathbb{C}[[X]]$ .

#### 2.1. Valuation

Introduisons sur le corps des fractions  $\mathbb{C}((X))$  de  $\mathbb{C}[[X]]$  la valuation  $v$  :

$$v : \mathbb{C}((X)) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\},$$

$$f \longmapsto \text{ord}_0(f)$$

qui à  $f$  associe son ordre en zéro.

*Briques de la construction.* – Pour  $\alpha \in \mathbb{Q}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on considère la famille de fonctions données par :

$$\varphi_\alpha^\lambda(x, q) = \frac{1}{\exp_{q^\alpha}(q^\alpha \lambda / ([\alpha]_q x^\alpha))},$$

ou  $\exp_q$  est la fonction  $q$ -exponentielle donnée par la série entière

$$\exp_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{[n]_q!},$$

où  $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$  avec  $[k]_q = (1 - q^k)/(1 - q)$ .

Considérons la famille des opérateurs linéaires aux  $q$ -différences donnée par

$$\Lambda_\alpha = x^{\alpha+1} D_q.$$

LEMME 1. – Pour  $\alpha \in \mathbb{Q}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  on a :

$$\Lambda_\alpha \varphi_\alpha^\lambda = \lambda \varphi_\alpha^\lambda.$$

LEMME 2. – Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\Lambda_\alpha^k = x^{k\alpha} \sum_{j=0}^k S_{\alpha,\beta}(k, j, q) x^{-j\beta} \Lambda_\beta^j,$$

où les  $S_{\alpha,\beta}(k, j, q)$  sont donnés par :

$$S_{\alpha,\beta}(k, 0, q) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$S_{\alpha,\beta}(k, k, q) = q^{(\alpha-\beta)k(k-1)/2}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$S_{\alpha,\beta}(k+1, j, q) = [k\alpha - j\beta]_q S_{\alpha,\beta}(k, j, q) + q^{k\alpha - (j-1)\beta} S_{\alpha,\beta}(k, j-1, q) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k.$$

DÉFINITION. – Les nombres  $S_{\alpha,\beta}(k, j, q)$  seront appelés  $q$ -nombres de Stirling généralisés.

Remarque. – D’après le Lemme 2 l’opérateur aux  $q$ -différences  $L$  peut s’écrire dans  $\mathbb{C}((x))^*[\Lambda_\alpha]$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ .

## 2.2. $D_q$ -polygone de Newton

Soit

$$L = \sum_{j=0}^n a_j(x) \Lambda_\alpha^j,$$

$$a_j = \sum_{i=-p_j}^{+\infty} a_{ji} t^i, \quad t^m = x,$$

$$a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Au monôme  $q$ -différentiel  $a_{ij} t^j \Lambda_\alpha^i$ ,  $a_{ij} \neq 0$ , on associe le point  $(i, j/m + \alpha i)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ .

On construit ensuite les quadrants :

$$QT\left(i, \frac{j}{m} + \alpha i\right) = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq i; b \geq \frac{j}{m} + \alpha i \right\}.$$

Puis on considère l’ensemble

$$QT(L) = \bigsqcup_{a_{ij} \neq 0} QT\left(i, \frac{j}{m} + \alpha i\right). \tag{3}$$

On définit le  $D_q$ -polygone de Newton, comme étant l’enveloppe convexe inférieure de  $QT(L)$  (pentes positives).

DÉFINITION. – L’origine est une singularité régulière pour  $L$ , si le  $D_q$ -polygone de Newton de  $L$  possède une unique pente nulle. Sinon, on dira que la singularité est irrégulière.

Remarque. – Le  $D_q$ -polygone de Newton ne dépend pas de la dérivation  $\Lambda_\alpha$  choisie pour exprimer l’opérateur  $L$ .

LEMME 3. – Soit  $L$  l'opérateur linéaire aux  $q$ -différences

$$L = \sum_{j=0}^n a_j(x) \Lambda_\alpha^j.$$

Alors

$$L(\varphi_\alpha^\lambda(x, q)Z(x)) = \varphi_\alpha^\lambda(x, q)L^\alpha(x, \lambda)Z(x),$$

où  $L^\alpha(x, \lambda)$  est l'opérateur linéaire aux  $q$ -différences donné explicitement par :

$$L^\alpha(x, \lambda) = P(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{[j]_{q^{-\alpha}}} \partial_{q^{-\alpha}}^{j, \lambda} P(x, \lambda) \prod_{k=0}^{j-1} (1 + x^{-\alpha} q^{-\alpha k} (q-1)\lambda) \Lambda_\alpha^j,$$

où  $\partial_{q^{-\alpha}}^{j, \lambda} P(x, \lambda)$  désigne la  $q$ -dérivée, au sens de Jackson, partiel d'ordre  $j$  par rapport à  $\lambda$  de  $P(x, \lambda)$  ou

$$P(x, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j(x) \lambda^j.$$

DÉFINITION. –  $P(x, \lambda)$  s'appelle symbole de l'opérateur aux  $q$ -différences  $L$  associé à l'opérateur  $\Lambda_\alpha$ .

### 3. Redressement d'une pente du $D_q$ -polygone de Newton

Soit l'opérateur linéaire aux  $q$ -différences de  $\mathbb{C}((x))^*[D_q]$  noté

$$L = \sum_{j=0}^n a_j(x) D_q^j.$$

Associés à  $L$  son  $D_q$ -polygone de Newton. On s'intéresse à la valeur de l'une des pentes strictement positives de celui-ci définie par :  $p = (v_2 - v_1)/(s_2 - s_1) - 1$ . Par définition, nous posons :

$$a_{s_1}(x) = e_{s_1} x^{v_1} + \dots; \quad v_1 = v(a_{s_1}) \quad \text{et} \quad a_{s_2}(x) = e_{s_2} x^{v_2} + \dots; \quad v_2 = v(a_{s_2}).$$

Transformons l'opérateur  $L$  en l'écrivant dans l'anneau  $\mathbb{C}((x))^*[\Lambda_p]$ ; où  $\Lambda_p = x^{p+1} D_q$ .

En effet, en utilisant le Lemme 2, on peut écrire  $L$  sous la forme :  $L = \sum_{j=0}^n b_j(x) \Lambda_p^j$  avec  $b_j(x) = x^{-pj} \sum_{k=j}^n S_{-1,p}(k, j, q) x^{-k} a_k(x)$  pour tout  $0 \leq j \leq n$ .

Expression et étude de l'opérateur  $L^p(x, \lambda)$ . –

$$L^p(x, \lambda) = P(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{[j]_{q^{-p}}} \partial_{q^{-p}}^{j, \lambda} P(x, \lambda) \prod_{k=0}^{j-1} (1 + x^{-p} q^{-pk} (q-1)\lambda) \Lambda_p^j. \tag{4}$$

Pour le côté de pente  $p$ . – On a les valuations suivantes

$$v \left( \partial_{q^{-p}}^{j, \lambda} P(x, \lambda) \prod_{k=0}^{j-1} (1 + x^{-p} q^{-pk} (q-1)\lambda) \right) = v(\partial_{q^{-p}}^{j, \lambda} P(x, \lambda)) - pj.$$

Afin de déterminer la valuation  $v(\partial_{q^{-p}}^{j, \lambda} P(x, \lambda))$  on établit aisément le lemme suivant

LEMME 4. – On a les propriétés suivantes :

- (i)  $\partial_{q^{-p}}^{j, \lambda} P(x, \lambda) = \sum_{k=j}^n [k]_{q^{-p}}^j b_k(x) \lambda^{k-j},$
- (ii)  $v(\partial_{q^{-p}}^{j, \lambda} P(x, \lambda)) = \inf\{v(b_k(x)) \mid j \leq k \leq n\}.$

Ainsi on en déduit pour le côté de pente  $p$  :

$$\begin{aligned} v(\partial_{q-p}^{s_1, \lambda} P(x, \lambda))(x) &= v(b_{s_1}(x)), \\ v(\partial_{q-p}^{s_2, \lambda} P(x, \lambda)) &= v(b_{s_2}(x)). \end{aligned}$$

Alors, la nouvelle pente est nulle puisque

$$v(b_{s_1}(x)) - ps_1 + ps_1 = v_1 - s_1 - ps_1 = v_2 - s_2 - ps_2 = v(b_{s_2}(x)) - ps_2 + ps_2.$$

Nous dirons alors que nous avons redressé la pente  $p$ .

*Cas des autres pentes.* – Soit un autre sommet du  $D_q$ -polygone de Newton associé à un point  $(j, v_j - j)$  différent des deux sommets considérés précédemment. Selon la transformation, ce point devient  $(j, v_j - j - pj)$ . Pour les points  $(j, v_j - j)$  et  $(s_1, v_1 - s_1)$  la pente est  $r = (v_1 - v_j)/(s_1 - j) - 1$ . Elle devient  $r' = r - p$ . La transformation géométrique est alors immédiate à décrire. On retranche  $p$  à chaque pente.

#### 4. Description de la méthode de calcul d’une solution formelle

Les données initiales sont :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=0}^n a_j(x) D_q^j, \\ a_j &= \sum_{i=-p_j}^{+\infty} a_{ji} t^i, \quad t^m = x, \quad m \in \mathbb{N}^*, \\ a_0 &\neq 0, \quad a_n \neq 0. \end{aligned}$$

Nous allons choisir  $p$  la plus grande pente strictement positive. On réécrit l’opérateur  $L$  dans l’anneau  $\mathbb{C}((x))[\Lambda_p]$  et on cherche une solution formelle sous la forme

$$y(x) = \varphi_p^\lambda(x, q)z(x). \tag{5}$$

Alors,  $z(x)$  vérifiera l’équation aux  $q$ -différences  $L^p(x, \lambda)z(x) = 0$  où  $L^p(x, \lambda)$  est un opérateur linéaire aux  $q$ -différences dont le  $D_q$ -polygone de Newton possède une seule pente nulle. Par suite  $z(x)$  peut être déterminée par la  $q$ -analogue de la méthode de Frobenius [1] qui fera l’objet du paragraphe suivant.

#### 5. $q$ -analogue de la méthode de Frobenius

Soit  $L$  appartenant à  $\mathbb{C}((X))^*[D_q]$ , nous supposons que le polygone de Newton de cet opérateur possède un côté de pente nulle. Sans rien changer à la généralité, on peut écrire  $L$  sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=0}^n t^{v_j+m_j} a_j(t) D_q^j, \\ a_j(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{ji} t^i, \quad t^m = x, \quad m \in \mathbb{N}^*, \\ a_0 &\neq 0, \quad a_n \neq 0, \quad a_{j0} \neq 0, \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{2}$$

La condition sur les pentes se traduit par l’existence d’un entier  $n_1$  tel que  $0 < n_1 \leq n$ ,  $v_{n_1} = v_0$  et pour tout  $j$  tel que  $0 \leq j \leq n$ ,  $v_j \geq v_0$ . En multipliant  $L$  par une puissance de  $t$ , on peut supposer  $v_0 = 0$ .

Cherchons une série formelle  $y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i t^{i+\lambda}$ ,  $g_0 \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  telle que  $Ly(t) = 0$ .

On a :

$$L(y(t)) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i t^{i+\lambda} \left( \sum_{j=0}^n t^{v_j} \left[ \frac{\lambda+i}{m} \right]_q^j a_j(t) \right)$$

avec  $[\lambda]_q^j = \prod_{k=0}^{j-1} [\lambda - k]_q$  ;  $[\lambda]_q = (1 - q^\lambda)/(1 - q)$  et  $[\lambda]_q^0 = 1$ .

Nous présenterons  $L(y(t))$  sous la forme :  $L(y(t)) = t^{v_0} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i t^{i+\lambda} f(\lambda + i, t)$  où  $f(\lambda + i, t) = \sum_{j=0}^n t^{v_j - v_0} \left[ \frac{\lambda+i}{m} \right]_q^j a_j(t)$ .

Puisque  $v_j - v_0 \geq 0$ , on peut écrire  $f(\lambda + i, t)$  comme série formelle en  $t$  à coefficients des polynômes en  $q^{\lambda/m}$  sous la forme :  $f(\lambda + i, t) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(\lambda + i) t^j$ . Alors, y sera solution formelle de  $L(y) = 0$  si et seulement si on peut choisir tous les coefficients  $g_1, g_2, \dots$  solutions du système récurrent

$$f_1(\lambda)g_0 + f_0(\lambda + 1)g_1 = 0,$$

⋮

$$f_j(\lambda)g_0 + \dots + f_0(\lambda + j)g_j = 0.$$

Ces coefficients seront tous des fonctions rationnelles de  $q^{\lambda/m}$ . Ainsi on aura

$$L(y(t)) = t^{v_0+\lambda} g_0 f_0(\lambda).$$

Pour que nous ayons une solution, il ne nous reste plus qu'à choisir  $\lambda$  tel que  $f_0(\lambda) = 0$  et  $\forall j > 0, f_0(\lambda + j) \neq 0$ .

DÉFINITION. –  $f_0(\lambda) = 0$  s'appelle l'équation indicelle de l'opérateur  $L$  (en la singularité 0).

L'équation indicelle est

$$f_0(\lambda) = f(\lambda, 0) = \sum_{\{j|v_j=v_0\}} \left[ \frac{\lambda}{m} \right]_q^j a_j 0.$$

C'est un polynôme en  $q^{\lambda/m}$  de degré  $n_1$  et de terme constant non nul. Il a donc toujours des racines et, en choisissant celle de plus grande partie réelle dans le cas où il a plusieurs racines dont la différence est un entier, il est toujours possible de satisfaire aux deux exigences indiquées.

**Remerciements.** Il m'est agréable de remercier le Professeur Ahmed Intissar, de m'avoir posé la question de la détermination explicite des fonctions propres de l'opérateur  $\Lambda_\alpha$ , qui était à mon sens l'idée essentielle derrière la réalisation de cette note et, aussi pour l'aide et les encouragements que j'ai trouvés auprès de lui aussi souvent que je le souhaitais. Je remercie aussi vivement le referee anonyme pour les nombreuses remarques importantes.

### Références bibliographiques

- [1] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover, 1956.
- [2] B. Malgrange, Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, in: Lecture Notes in Math., Vol. 712, Springer, Berlin, 1979, pp. 777–786.
- [3] F. Marotte, C. Zhang, Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux  $q$ -différences linéaire analytique, Ann. Inst. Fourier 50 (6) (2000).
- [4] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions to linear algebraic  $q$ -difference equation, Ann. Fac. Sci. Toulouse (6) I (1) 53–94.
- [5] J.P. Ramis, Divergent series and holomorphic dynamical systems, Prépublications de l'Université L. Pasteur de Strasbourg, June 1993.
- [6] C. Zhang, Développements asymptotiques  $q$ -Gevrey et séries  $Gq$ -sommables, Ann. Inst. Fourier 49 (1) (1999).