C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 649–654

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Multiplicité des solutions d'équilibre d'une coque de Marguerre–von Kármán membranaire

Alain Léger [a], **Bernadette Miara** [b]

[a] EDF-R&D, mécanique et modèles numériques, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart, France

[b] Laboratoire de modélisation et simulation numérique, École supérieure d'ingénieurs en électrotechnique et électronique, cité Descartes, 2, boulevard Blaise Pascal, 93160 Noisy-le-Grand cedex, France

Reçu le 30 avril 2002 ; accepté le 4 juin 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On construit explicitement une infinité de solutions d'équilibre d'un problème de coques membranaires de type Marguerre–von Kármán non chargées. Cette construction s'appuie sur l'existence de trois solutions élémentaires, complétée par la solution d'une équation de Monge–Ampère associée à une partition de la configuration de référence de la coque. ***Pour citer cet article : A. Léger, B. Miara, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 649–654.***

Multiplicity of solutions to the Marguerre–von Kármán membrane equations

Abstract We build explicitly an infinite number of equilibrium solutions of unloaded Marguerre–von Kármán membrane shells. This construction is based upon the existence of three elementary solutions, together with the solution of a Monge–Ampère equation associated with a partition of the reference configuration of the shell. ***To cite this article: A. Léger, B. Miara, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 649–654.***

Abridged English version

Let ω be a Lipschitz domain of the plane. The middle surface S^ε of a shell of thickness 2ε is built through the C^1-diffeomorphism $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \to R$, $\theta^\varepsilon \in \mathrm{C}^2(\bar{\omega})$, by:

$$S^\varepsilon = \big\{ \big(x_{1,} x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2)\big),\ (x_{1,} x_2) \in \bar{\omega} \big\}$$

and the reference configuration $\overline{\Omega}^\varepsilon \subset R^3$, assumed to be stress-free, is then given by:

$$\overline{\Omega}^\varepsilon = \big\{ x_{1,} x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon a^\varepsilon(x_1, x_2),\ (x_{1,} x_2) \in \bar{\omega},\ |x_3^\varepsilon| \leqslant \varepsilon \big\},$$

Adresses e-mail : alain.leger@der.edfgdf.fr (A. Léger); b.miara@esiee.fr (B. Miara).

S1631-073X(02)02455-X/FLA

where a^ε is the unit normal to S^ε. Assume the shell is made of a Saint-Venant Kirchhoff material, of Young modulus E and Poisson ratio ν. Then the set of Marguerre–von Kármán equations is system (1), where f^ε, φ_1^ε, φ_2^ε denote the external loads, u^ε the scaled vertical displacement, and φ^ε a stress function (*see* [2] for a complete justification of this system). The main qualitative feature of problem (1) is that the nonlinear terms, here in the right-hand member, involve the so-called Monge–Ampère bracket $[\cdot,\cdot]$, defined as $[g,h] = \partial_{11}g\partial_{22}h + \partial_{11}h\partial_{22}g - 2\partial_{12}g\partial_{12}h$ for regular enough functions g and h.

The present work investigates the set of the solutions to this equilibrium problem in the membrane case without any external load. The membrane problem is formally obtained from problem (1) by dropping the bending terms, which gives problem (2). The main result is that infinitely many solutions, that means infinitely many equilibrium shapes of the unloaded shell, can be explicitly built. This work therefore generalizes a previous result given in [3] in the case of spherical caps.

We first observe, as the first step of the proof of this result, that there exists three solutions, referred to as “elementary solutions A, B and C” in the following. Solutions A and C are inextensional and solution B corresponds to an in-plane configuration.

The second step amounts to associating one of the elementary solutions with a part of the domain, and to solving a Monge–Ampère equation on the other part. This consequently begins by defining a partition of ω, which is first given by $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, where ω_2 is a regular convex domain strictly interior to ω. Then, using elementary solution B in ω_1 and $\varphi = 0$ in ω_2, problem (2) is changed into problem (3a), (3b).

Solving problem (3a), (3b) requires the following result (*see* [1,6,7]):

Let Ω be a regular convex open set, ϕ and f regular given functions, f positive on Ω; then

(i) *the problem* $\mathrm{Det}(\partial^2 w) = f$ *in* Ω, $w = \phi$ *on* $\partial\Omega$ *has a unique solution in* $\mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$;

(ii) *if in addition* $f \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$, *and* ϕ *is the restriction to* $\partial\Omega$ *of a function* $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$, *then the solution is also in* $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

We can consequently conclude:

THÉORÈME. – *Problem* (2) *possesses infinitely many solutions obtained by combining the solution of a Monge–Ampère equation on a regular convex part of the domain, together with elementary solution B on the complementary part.*

Nontrivial solutions can be built in the same way using elementary solutions A and C, which leads to other sets of infinitely many solutions, using different types of partition and an additional regularity assumption on the domain.

---

1. Le modèle de coque de Marguerre–von Kármán

Les équations bidimensionnelles de coques de Marguerre–von Kármán sont posées sur un ouvert simplement connexe ω du plan, de frontière $\partial\omega$ lipschitzienne. Une plus grande régulité sera toutefois nécessaire pour la construction effective des solutions multiples. La surface moyenne S^ε d’une coque d’épaisseur 2ε est définie à partir du C^1-difféomorphisme $\theta^\varepsilon : \bar\omega \to R$, $\theta^\varepsilon \in \mathrm{C}^2(\bar\omega)$, par :

$$S^\varepsilon = \left\{ \left(x_1, x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2)\right),\ (x_1, x_2) \in \bar\omega \right\}$$

et sa configuration de référence $\overline{\Omega}^\varepsilon \subset R^3$, supposée sans contraintes, est alors donnée par :

$$\overline{\Omega}^\varepsilon = \left\{ x_1, x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon a^\varepsilon(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \bar\omega,\ \left|x_3^\varepsilon\right| \leqslant \varepsilon \right\},$$

où a^ε est la normale unitaire à S^ε. La coque est supposée linéairement élastique au sens usuel des matériaux de Saint-Venant Kirchhoff, de module d’Young et coefficient de Poisson notés E et ν. Soumise à des forces extérieures $f^\varepsilon \in \mathrm{L}^2(\omega)$ et des conditions au bord $\varphi_1^\varepsilon \in \mathrm{H}^{3/2}(\partial\omega)$ et $\varphi_2^\varepsilon \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\omega)$, la coque subit un champ de déplacement dont la composante verticale u^ε (mise à l'échelle) est solution du problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2E}{3(1-\nu^2)}\varepsilon^3\Delta^2 u^\varepsilon = 2\varepsilon[\varphi^\varepsilon, u^\varepsilon + \theta^\varepsilon] + f^\varepsilon, & \\ & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2\varphi^\varepsilon = -\dfrac{E}{2}[u^\varepsilon, u^\varepsilon + 2\theta^\varepsilon] & \\ u^\varepsilon = \partial_\nu u^\varepsilon = 0, & \\ & \text{sur } \partial\omega, \\ \varphi^\varepsilon = \varphi_1^\varepsilon, \quad \partial_\nu\varphi^\varepsilon = \varphi_2^\varepsilon & \end{cases} \tag{1}$$

où le crochet de Monge–Ampère $[\cdot,\cdot]$ est défini pour des fonctions assez régulières g et h par

$$[g,h] = \partial_{11}g\,\partial_{22}h + \partial_{11}h\,\partial_{22}g - 2\partial_{12}g\,\partial_{12}h,$$

et où la fonction d'Airy φ^ε permet de calculer les résultantes des efforts intérieurs en chaque point de la surface moyenne. Les composantes horizontales du champ de déplacement se calculent (à un déplacement rigide infinitésimal près) à partir de u^ε en résolvant un problème d'élasticité linéarisée. (*Voir* [2] pour une justification complète de ce modèle.)

Plusieurs résultats de non unicité ont été obtenus pour ce modèle en l'absence de chargement. D'une part il a été établi dans [4] que, lorsque la finesse ε est supérieure à une valeur critique, ce modèle possède au moins deux solutions non triviales. D'autre part, toujours dans le cas des solutions axisymétriques d'une calotte sphérique, de nombreux travaux, à la suite de [8], ont montré que cette finesse critique est un point limite d'une branche de solutions non triviales.

Le présent travail constitue une généralisation de l'étude du problème limite membranaire effectuée dans [3] dans le cas des solutions axisymétriques d'une calotte sphérique. On étudie l'ensemble des solutions du problème obtenu en négligeant les termes de flexion dans (1), et cela en l'absence de chargement extérieur. Le cadre indiqué précédemment suppose $\theta^\varepsilon \in \mathrm{C}^2(\bar\omega)$. Pour toute la suite, nous supposerons en fait θ^ε aussi régulier que nécessaire et, de plus, que la surface S^ε ainsi construite est strictement convexe. Le paramètre ε n'intervenant plus dans le problème membranaire, nous notons $\theta,\ S,\ u,\ \varphi$ au lieu de $\theta^\varepsilon,\ S^\varepsilon,\ u^\varepsilon,\ \varphi^\varepsilon$ et cherchons les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} [\varphi, u+\theta] = 0, & \\ & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2\varphi = -\dfrac{E}{2}[u, u+2\theta], & \\ u = 0 \text{ et } \varphi = \partial_\nu\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\omega. & \end{cases} \tag{2}$$

Nous nous intéressons dans toute la suite au problème (2), mais attirons l'attention sur le fait que, bien qu'obtenu par une limite formelle de (1) à $\varepsilon = 0$, il n'est pas justifié par une analyse asymptotique.

2. Une infinité de solutions d'équilibre

On suppose que la coque est simplement appuyée sur le plan contenant ω, c'est-à-dire $\theta = 0$ sur $\partial\omega$.

2.1. Trois solutions élémentaires

En l'absence de chargement, le problème non linéaire de coques de Marguerre–von Kármán membranaires (2) admet les trois solutions suivantes, que l'on désignera par « solutions élémentaires » dans toute la suite :

- solution A : $u=0,\ \varphi=0$ dans $\bar{\omega}$,
- solution B : $u=-\theta$ dans $\bar{\omega},\ \Delta^2\varphi=\frac{E}{2}[\theta,\theta]$ dans ω et $\varphi=\partial_\nu\varphi=0$ sur $\partial\omega$,
- solution C : $u=-2\theta,\ \varphi=0$ dans $\bar{\omega}$.

Dans les deux cas non triviaux, la régularité de la solution u est celle de θ.

L'interprétation mécanique de ces solutions est la suivante : sans forces appliquées, la solution A correspond à l'état d'équilibre trivial, la solution C correspond à la coque qui a subi une éversion et dont la surface moyenne est obtenue par symétrie de la surface moyenne de référence S par rapport au plan contenant ω, et la solution B est celle pour laquelle la surface moyenne après déformation se trouve dans le plan contenant ω. Cette caractérisation des trois solutions ci-dessus était déjà notée dans [3] mais n'exige donc en fait aucune hypothèse de symétrie. De plus, le choix de garder le déplacement comme inconnue facilite cette interprétation que les changements de variables effectués dans [3] rendaient relativement difficile. En revanche, le problème (1) ou (2) ne concernant que la composante verticale du déplacement, la solution B n'est pas inextensionelle, et c'est la solution en φ qui fournit l'état de contraintes auto-équilibré correspondant.

2.2. D'autres solutions

Ce qui suit consiste à montrer qu'il existe une infinité d'autres solutions, que l'on construit explicitement. L'idée générale de cette construction repose sur une combinaison des solutions élémentaires associée à une partition du domaine ω.

2.2.1. *Construction à partir de B*

On considère tout d'abord une partition $\omega=\omega_1\cup\omega_2$, où ω_2 est un ouvert convexe régulier strictement intérieur à ω.

On vérifie alors que le problème (2) est satisfait par les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} u=-\theta & \text{dans } \bar{\omega}_1,\\ \Delta^2\varphi=\dfrac{E}{2}[\theta,\theta] & \text{dans } \omega_1,\\ \varphi=\partial_\nu\varphi=0 & \text{sur } \partial\omega_1,\end{cases} \tag{3a}$$

$$\begin{cases} [u,u+2\theta]=0 & \text{dans } \omega_2,\\ u=-\theta & \text{sur } \partial\omega_2,\\ \varphi=0 & \text{dans } \bar{\omega}_2.\end{cases} \tag{3b}$$

L'existence d'une solution du problème membranaire pour la partition de ω choisie se ramène donc à l'étude du problème non linéaire (3b). On observe tout d'abord que le changement de variable $v=u+\theta$ transforme ce problème en $[v,v]=[\theta,\theta]$ dans ω_2, $v=0$ sur $\partial\omega_2$, soit une équation de Monge–Ampère dans un domaine régulier convexe avec des données régulières. On rappelle alors, dans le cas d'un ouvert de R^2, les résultats suivants établis pour ce problème dans [1,6,7] :

Soit Ω un ouvert régulier, convexe ϕ et g des fonctions données régulières, g positive sur Ω ; alors

(i) *le problème* $\mathrm{Det}(\partial^2 w)=g$ *dans* Ω, $w=\phi$ *sur* $\partial\Omega$ *possède une solution unique dans* $\mathrm{C}^2(\Omega)\cap\mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$;

(ii) *si de plus* $g\in\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$, *et* ϕ *est la restriction à* $\partial\Omega$ *d'une fonction* $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$, *alors la solution est dans* $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

On peut alors énoncer, puisque la convexité de θ assure $[\theta,\theta]>0$,

THÉORÈME. – *Le problème* (2) *possède une infinité de solutions obtenues en combinant la solution d'une équation de Monge–Ampère sur une partie régulière convexe du domaine à la solution élémentaire B sur le complémentaire de cette partie.*

2.2.2. *Construction à partir de A et C*

On peut également construire un nouvel ensemble de solutions, différentes des précédentes, à partir des solutions élémentaires A et C. On introduit pour cela une nouvelle partition en trois sous-domaines définie comme suit : $\omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3,\ \omega_i \cap \omega_j = \emptyset$, et, avec les notations $\gamma_i = \partial\omega_i \cap \partial\omega$ et $\gamma_{ij} = \partial\omega_i \cap \partial\omega_j$, $\gamma_i \neq \emptyset$ pour $i \in \{1,2,3\},\ \gamma_{12} \neq \emptyset,\ \gamma_{23} \neq \emptyset,\ \gamma_{13} = \emptyset$. Alors, si le problème suivant :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{dans } \bar{\omega}_1, \\ \varphi = 0 & \text{dans } \bar{\omega}_1, \\[4pt] [u, u+2\theta] = 0 & \text{dans } \omega_2, \\ u = 0 & \text{sur } \gamma_{12}, \\ u = -2\theta & \text{sur } \gamma_{23}, \\ u = 0 & \text{sur } \gamma_2, \\ \varphi = 0 & \text{dans } \bar{\omega}_2, \\[4pt] u = -2\theta & \text{dans } \bar{\omega}_3, \\ \varphi = 0 & \text{dans } \bar{\omega}_3 \end{cases}$$

admet une solution, celle-ci satisfait le problème initial (2). En effet, le changement de variable $v = u + \theta$ transforme le problème posé dans ω_2 en $[v, v] = [\theta, \theta]$ dans ω_2, $v = \theta$ sur γ_{12}, $v = -\theta$ sur γ_{23}, $v = \theta$ sur γ_2. En supposant de plus qu'il existe une partie régulière de la frontière $\partial\omega$, il est alors toujours loisible de construire ω_2 satisfaisant les hypothèses des résultats rappelés précédemment pour l'équation de Monge–Ampère ; γ_{12} étant alors incluse dans cette partie régulière. Sous cette hypothèse de régularité, que l'on gardera dans la suite, on conclut donc comme précédemment à l'existence d'une solution non triviale pour la partition choisie.

2.2.3. *Construction à partir de B et A ou B et C*

Il est également possible d'associer la solution élémentaire B à une partition de ω en plus de deux sous-domaines. Reprenons par exemple la partition en trois sous-domaines utilisée précédemment. Le problème suivant fournit alors une infinité de solutions différentes de celles construites jusqu'ici :

$$\begin{cases} u = -\theta, & \text{dans } \bar{\omega}_1, \\ \Delta^2\varphi = \dfrac{E}{2}[\theta, \theta] & \text{dans } \omega_1, \\ \varphi = \partial_\nu\varphi = 0 & \text{sur } \partial\omega_1, \\[4pt] [u, u+2\theta] = 0 & \text{dans } \omega_2, \\ u = -\theta & \text{sur } \gamma_{12}, \\ u = 0 \ (\text{resp.} -2\theta) & \text{sur } \gamma_{23}, \\ u = 0 & \text{sur } \gamma_2, \\ \varphi = 0 & \text{dans } \bar{\omega}_2, \\[4pt] u = 0 \ (\text{resp.} -2\theta) & \text{dans } \bar{\omega}_3, \\ \varphi = 0 & \text{dans } \bar{\omega}_3. \end{cases}$$

On conclut alors par l'étude du problème dans ω_2. Une telle construction peut être reproduite avec des partitions comprenant un plus grand nombre de parties, pour autant que les contraintes de régularité et de convexité soient satisfaites pour les sous-domaines associés à l'équation de Monge–Ampère. Commentaires :

- D'autres solutions peuvent être exhibées. En effet, on peut toujours construire des solutions localement retournées. Il suffit pour cela par exemple de choisir une partition en deux sous-domaines ω_1 et ω_2, telle que l'image de $\partial\omega_2$ par θ soit une courbe plane de S. Soit (p) le plan de cette courbe. On choisit alors, dans ω_1, la solution triviale A, et, dans ω_2, $\varphi = 0$ avec un déplacement u conduisant à une surface moyenne symétrique par rapport à (p) de la restriction de S à ω_2.

- Les solutions fortes de (1) sont classiquement telles que $u^\varepsilon \in \mathrm{H}_0^2(\omega) \cap \mathrm{H}^4(\omega),\ \varphi^\varepsilon \in \mathrm{H}^4(\omega)$ (cf. [2]), et celles de (2) telles que $u \in \mathrm{H}_0^1(\omega) \cap \mathrm{H}^2(\omega),\ \varphi \in \mathrm{H}_0^2(\omega) \cap \mathrm{H}^4(\omega)$. De même que pour le cas de la calotte sphérique étudiée dans [3], les solutions construites ici sont moins régulières, en général $u \in \mathrm{H}_0^1(\omega),\ \varphi \in \mathrm{H}_0^2(\omega)$.
- Il est intéressant d'observer qu'une infinité de solutions peut donc être construite d'une infinité de manières, et que l'ensemble de ces solutions convexifie le « triangle » de sommets A, B, C. La caractérisation des solutions situées dans ce triangle comme minima, maxima, ou points selles d'une fonctionnelle, est exposée dans [5]. En revanche, la structure topologique de cet ensemble de points critiques reste à étudier.
- Pour la prise en compte de la flexion, on se reportera à [5].

Références bibliographiques

[1] T. Aubin, Équations de Monge–Ampère réelles, J. Funct. Anal. 41 (1981) 354–377.
[2] P.G. Ciarlet, J.C. Paumier, A justification of the Marguerre–von Kármán equations, Comput. Mech. 1 (1986) 177–202.
[3] G. Geymonat, A. Léger, Nonlinear spherical caps and associated plate and membrane problems, J. Elasticity 57 (1999) 171–200.
[4] O. Kavian, B. Rao, Une remarque sur l'existence de solutions non nulles pour les équations de Marguerre–von Kármán, C. R. Acad. Sci. 317 (1993) 1137–1142.
[5] A. Léger, B. Miara, En préparation.
[6] P.-L. Lions, Sur les équations de Monge–Ampère I, Manuscripta Math. 41 (1983) 1–43.
[7] P.-L. Lions, Sur les équations de Monge–Ampère, Arch. Rational Mech. Anal. 89 (2) (1985) 93–122.
[8] M. Rosati, A nonlinear eigenvalue problem governing the eversion of elastic spherical caps, Ann. Mat. Pura Appl. 59 (4) (1991) 189–210.