C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 233–236

Analyse harmonique/*Harmonic Analysis*

Inégalité de Haagerup, groupoïdes et immeubles euclidiens

Malik Talbi

Institut Girard Desargues, bâtiment 101, 43, bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France

Reçu le 6 mai 2002 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Alain Connes.

Résumé Cette Note présente une méthode de démonstration de l'inégalité de Haagerup pour des groupoïdes discrets basée sur des déformations de triangles. Nous appliquons cette méthode à des groupes agissants librement et par isométries sur les sommets de certains immeubles euclidiens. ***Pour citer cet article : M. Talbi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 233–236.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Haagerup's inequality, groupoïds and Euclidean buildings

Abstract This Note presents a method of proof of the Haagerup's inequality for discrete groupoïds using deformations of triangles. We apply this method to groups acting freely and by isometries on vertices of some euclidean buildings. ***To cite this article: M. Talbi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 233–236.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Définitions, notations

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde discret et $\mathcal{G}^{(0)}$ le sous ensemble de ses unités. Désignons par $\mathcal{G}_0^{(3)}$ l'ensemble des triangles $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\mathcal{G}$, i.e. des triplets composables de $\mathcal{G}$ dont le produit est une unité. Ces triangles seront dits dégénérés si leurs côtés α_i, $i = 1, 2, 3$, sont des unités.

Nous munissons $\mathcal{G}$ d'une longueur $L : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ telle que : (i) $L(\alpha) = 0, \forall\alpha \in \mathcal{G}^{(0)}$; (ii) $L(\alpha^{-1}) = L(\alpha)$, $\forall\alpha \in \mathcal{G}$ et (iii) $L(\alpha_1\alpha_2) \leqslant L(\alpha_1) + L(\alpha_2)$, $\forall\alpha_1, \alpha_2$ composables.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, notons $B_L(n) = \{\alpha \in \mathcal{G},\ L(\alpha) \leqslant n\}$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons $\mathbb{K}\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions à support fini sur $\mathcal{G}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 1.1. – (a) On dit qu'un ensemble de triangles $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}_0^{(3)}$ vérifie l'inégalité de Haagerup s'il existe un polynôme P tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathbb{R}\mathcal{G}$ avec ϕ_1 à support dans $B_L(n)$, on a :

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathcal{T}} \phi_1(\alpha_1)\phi_2(\alpha_2)\phi_3(\alpha_3) \leqslant P(n)\|\phi_1\|_2\|\phi_2\|_2\|\phi_3\|_2,$$

où $\| \|_2$ est la norme L^2 ;
(b) On dit que $(\mathcal{G}, L)$ vérifie l'inégalité de Haagerup si l'ensemble $\mathcal{G}_0^{(3)}$ de ses triangles la vérifie.

La condition (b) généralise la définition connue [4] de l'inégalité de Haagerup dans le cas d'un groupe discret G : $\exists C, r \geqslant 0$, $\forall\phi \in \mathbb{C}G$, $\|\lambda(\phi)\| \leqslant C\|(1 + L)^r\phi\|_2$ où $\lambda : \mathbb{C}G \to B(l^2(G))$ est la représentation

Adresse e-mail : talbi@desargues.univ-lyon1.fr (M. Talbi).

S1631-073X(02)02463-9/FLA

régulière gauche. Cette définition est équivalente à la propriété (*DR*) de décroissance rapide de Jolissaint : $H_L^\infty(G) \subset C_r^*(G)$. L'existence d'une telle inclusion induisant un isomorphisme en K-théorie [3] joue un rôle crucial dans la démonstration donnée dans [2] de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov et dans la démonstration donnée dans [5] de la conjecture de Baum–Connes pour certains groupes.

Supposons que G agit librement par isométries sur l'espace métrique (X, d) et considérons le groupoïde $\mathcal{G}(X, G) = X \times X/_{(x,y)\sim(gx,gy)}$ muni de la longueur définie par $L[x, y] = d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. On a le résultat suivant [7], qui justifie l'intérêt de la Définition 1.1(b) :

PROPOSITION 1.2. – *Si $(\mathcal{G}(X, G), L)$ vérifie l'inégalité de Haagerup, alors pour tout $x_0 \in X$ le groupe G muni de la longueur $L_{x_0} : g \mapsto d(x_0, gx_0)$ vérifie cette inégalité.*

2. Inégalité de Haagerup et déformations des triangles

Notre stratégie pour démontrer l'inégalité de Haagerup pour un groupoïde $\mathcal{G}$ donné consiste à opérer des déformations successives sur l'ensemble $\mathcal{G}_0^{(3)}$ des triangles de $\mathcal{G}$ pour réduire la démonstration de cette inégalité à l'ensemble des triangles dégénérés. On utilise alors le résultat suivant qui est direct :

PROPOSITION 2.1. – *L'ensemble des triangles dégénérés de $\mathcal{G}$ vérifie l'inégalité de Haagerup.*

Les déformations « compatibles » avec l'inégalité de Haagerup considérées ici sont les $\mathcal{B}$-pincements et les changements de faces tétraèdriques, Fig. 1.

Le $\mathcal{B}$-pincement. – Fixons un polynôme P_1 et considérons pour chaque $\alpha \in \mathcal{G}$ *un domaine $\mathcal{B}(\alpha)$ de L-décompositions de α*, i.e. un ensemble de triplets $(u, \tilde{\alpha}, v)$ tels que : (i) $L(u), L(v) \leqslant P_1(L(\alpha))$, (ii) le triplet $(u, \tilde{\alpha}, v^{-1})$ est composable et $\alpha = u\tilde{\alpha}v^{-1}$, (iii) si $(u, \tilde{\alpha}, v) \in \mathcal{B}(\alpha)$ alors $(v^{-1}, \tilde{\alpha}^{-1}, u^{-1}) \in \mathcal{B}(\alpha^{-1})$.

DÉFINITION 2.2. – $\mathcal{G}$ est à $\mathcal{B}$-croissance polynomiale s'il existe un polynôme P tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{G}$, pour tout $n \in \mathbb{N} : \#\{(u, \tilde{\alpha}, v) \in \mathcal{B}(\alpha),\ L(u), L(v), L(\tilde{\alpha}) \leqslant n\} \leqslant P(n)$.

D'autre part, nous dirons qu'un triangle $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$ *est un $\mathcal{B}$-pincement d'un triangle* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ s'il existe $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{G}$ tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a $(u_i, \tilde{\alpha}_i, u_{i+1}) \in \mathcal{B}(\alpha_i)$.

DÉFINITION 2.3. – Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{T}'$ de triangles de $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{B}$-pincement d'un autre ensemble $\mathcal{T}$ de triangles de $\mathcal{G}$ s'il existe un polynôme P tel que tout triangle $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dans $\mathcal{T}$ admet un $\mathcal{B}$-pincement $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$ dans $\mathcal{T}'$ qui vérifie $\max_i L(\tilde{\alpha}_i) \leqslant \min_i P(L(\alpha_i))$.

Nous avons alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2.4. – *Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux ensembles de triangles de $\mathcal{G}$. Si $(\mathcal{G}, L)$ est à $\mathcal{B}$-croissance polynomiale et si l'ensemble $(\mathcal{T}', L)$ vérifie l'inégalité de Haagerup et est un $\mathcal{B}$-pincement de l'ensemble $\mathcal{T}$, alors $(\mathcal{T}, L)$ la vérifie aussi.*

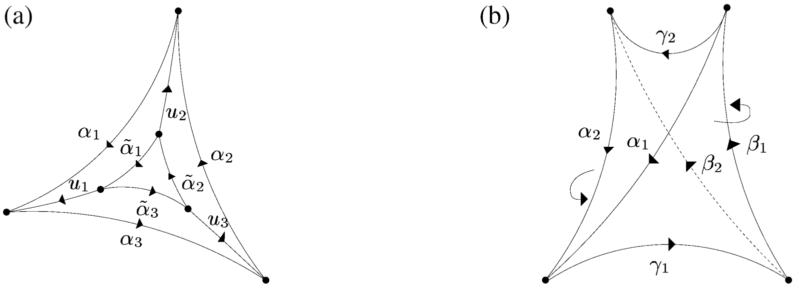

Figure 1. – (a) Le $\mathcal{B}$-pincement. (b) Le changement de faces tétraèdriques.

Le changement de faces tétraèdriques. – Un quadruplet $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ d'éléments de $\mathcal{G}$ est *un tétraèdre* si les paires (α_1, β_1), (α_2, β_2) sont composables et ont même produit $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$. Un tétraèdre est obtenu à partir d'une paire de triangles $\{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)\}$ ayant en commun le côté γ_1 appelé *base*. Ces deux triangles sont des « faces » du tétraèdre. Les deux « autres faces » sont données par les triangles $(\alpha_1^{-1}, \alpha_2, \gamma_2)$ et $(\beta_1, \beta_2^{-1}, \gamma_2)$. Nous appellerons ce passage de la paire de triangles $\{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)\}$ de même base γ_1 à la paire $\{(\alpha_1^{-1}, \alpha_2, \gamma_2), (\beta_1, \beta_2^{-1}, \gamma_2)\}$ de même base γ_2 *un changement de faces tétraèdriques*.

DÉFINITION 2.5. – Nous dirons qu'un ensemble de triangles $\mathcal{T}'$ est un changement de faces tétraèdriques d'un ensemble de triangles $\mathcal{T}$ si pour toute paire de triangles de $\mathcal{T}$ ayant une même base, la paire de triangles obtenue par changement de faces tétraèdriques est dans $\mathcal{T}'$.

Pour un polynôme P donné, nous dirons qu'un ensemble de triangles $\mathcal{T}'$ est un P-changement de faces tétraèdriques d'un ensemble de triangles $\mathcal{T}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des ensembles de triangles $\mathcal{T}_n^k$, $1 \leqslant k \leqslant P(n)$, pour lesquels $\mathcal{T}'$ est un changement de faces tétraèdriques et telles que $\mathcal{T}_n \subset \bigcup_k \mathcal{T}_n^k$ où $\mathcal{T}_n = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T},\ L(\alpha) \leqslant n\}$.

Enfin, nous dirons qu'une partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}^{(2)}$ est *L-équilibrée* s'il existe un polynôme P tel que pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$, $L(\beta) \leqslant P(L(\alpha))$. Nous avons alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.6. – *Soit P un polynôme donné et soient $\mathcal{T},\ \mathcal{T}' \subset \mathcal{G}_0^{(3)}$. Si $\mathcal{T}'$ est un P-changement de faces tétraèdriques de $\mathcal{T}$ et $(\mathcal{T}', L)$ vérifie l'inégalité de Haagerup et si $\mathcal{T}$ est L-équilibrée, alors $(\mathcal{T}, L)$ la vérifie aussi.*

La preuve des Propositions 2.4 et 2.6, inspirée de [7] et [6], est assez technique ; elle est développée dans [8].

3. Inégalité de Haagerup et immeubles euclidiens

Soit Δ un immeuble euclidien. Désignons par $\mathcal{V}_\Delta$ l'ensemble des sommets de Δ muni de la métrique théorique d issue du 1-squelette de Δ. Soit G un groupe qui agit librement et par isométries sur $\mathcal{V}_\Delta$. En appliquant les méthodes du $\mathcal{B}$-pincement et du changement de faces tétraèdriques on obtient le résultat suivant qui généralise le résultat obtenu dans [7] :

THÉORÈME 3.1. – *Si Δ est de type $\tilde{A}_{k_1} \times \cdots \times \tilde{A}_{k_n}$ où $k_i \in \{1, 2\}$ alors G vérifie l'inégalité de Haagerup.*

Idée de la preuve. – Considérons tout d'abord un immeuble euclidien Δ de type quelconque et définissons le domaine $\mathcal{B}$ de décomposition de la façon suivante : pour deux sommets quelconques $x, y \in \mathcal{V}_\Delta$ fixons un appartement Σ qui les contient. Considérons leur fermeture convexe combinatoire $B(x, y)$. C'est l'ensemble des sommets contenus dans toutes les racines de Σ qui contiennent x et y. $B(x, y)$ ne dépend pas de l'appartement Σ choisi. Nous avons de plus $gB(x, y) = B(gx, gy)$ pour tout $g \in G$. Nous définissons alors pour tout $x, y \in \mathcal{V}_\Delta : \mathcal{B}([x, y]) = \{([x, x'], [x', y'], [y, y']) \mid x', y' \in B(x, y)\}$. L'ensemble $\mathcal{B}([x, y])$ est bien un domaine de décomposition de $[x, y]$ et nous avons le lemme suivant :

LEMME 3.2. – *Le groupoïde $\mathcal{G}(\mathcal{V}_\Delta, G)$ est à $\mathcal{B}$-croissance polynomiale.*

D'autre part, nous dirons qu'un triangle $([x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1])$ de $\mathcal{G}(\mathcal{V}_\Delta, G)$ est réduit si le triplet (x_1, x_2, x_3) est réduit ; c'est-à-dire si pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, nous avons $B(x_i, x_{i+1}) \cap B(x_i, x_{i-1}) = \{x_i\}$. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des triangles réduits. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des triangles $([x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1])$ tels que $B(x_1, x_2) \cap B(x_2, x_3) \cap B(x_3, x_1) \neq \emptyset$. Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 3.3. – *L'ensemble $\mathcal{R}$ est un $\mathcal{B}$-pincement de l'ensemble des triangles de $\mathcal{G}(\mathcal{V}_\Delta, G)$. L'ensemble des triangles dégénérés est un $\mathcal{B}$-pincement de l'ensemble $\mathcal{D}$.*

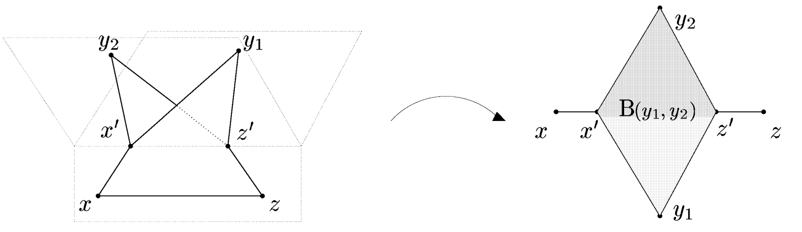

Figure 2. – Le cas $\tilde{A}_2$.

Si l'immeuble Δ est de type $W_1 \times W_2$, nous avons $B(x, y) = B_1(x_1, y_1) \times B_2(x_2, y_2)$ où les x_i, y_i, pour $i = 1, 2$, sont les i-èmes coordonnées respectives de x, y dans l'ensemble des sommets de l'immeuble de type W_i et $B_i(x_i, y_i)$ est leur fermeture convexe combinatoire dans cet immeuble. Par ailleurs, tout triplet réduit $T = ((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2))$ est tel que le triplet $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, pour $i = 1, 2$ est réduit dans l'immeuble de type W_i. Nous noterons alors $T = T_1 * T_2$. Ainsi, le $\mathcal{B}$-pincement se fait par rapport à chacune des composantes irréductibles de l'immeuble Δ et pour connaître la forme des triplets réduits de Δ, il suffit de connaître la forme des triplets réduits des immeubles euclidiens de type irréductible.

Dans le cas où l'immeuble est de type $\tilde{A}_1$, les triplets réduits sont les triplets dégénérés (x, x, x), $x \in \mathcal{V}_\Delta$. Ainsi, par les Lemmes 3.2 et 3.3 et les Propositions 2.1 et 2.4, nous déduisons le Théorème 3.1 dans le cas où Δ est de type $\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_1$ puisque $\mathcal{R}$ est exactement l'ensemble des triangles dégénérés.

Dans le cas où l'immeuble est de type $\tilde{A}_2$, les triplets réduits sont contenus dans un appartement. Ceci demeure vrai dans un immeuble de type $\widetilde{B}_2$ mais est en général faux dans un immeuble de type $\widetilde{G}_2$. Ces triplets réduits dans le cas $\tilde{A}_2$ sont soit dégénérés soit les sommets de triangles équilatéraux dans la représentation géométrique de Δ. Le changement de faces tétraèdriques de deux tels triangles ayant une base commune donne deux triangles dans $\mathcal{D}$ comme le montre la Fig. 2.

Ceci n'est en général pas le cas dans un immeuble de type $\widetilde{B}_2$ ou $\tilde{A}_3$ du fait que dans ces immeubles de type irréductible, deux murs peuvent être orthogonaux.

De plus, dans le cas d'un immeuble euclidien quelconque, le changement de faces tétraèdriques se fait par rapport à chacune des composantes irréductibles de l'immeuble. Nous en déduisons le lemme suivant :

LEMME 3.4. – *Si Δ est de type $\tilde{A}_{k_1} \times \cdots \times \tilde{A}_{k_n}$ où $k_i \in \{1, 2\}$, les triangles non dégénérés de $\mathcal{R}$ sont équilatéraux et il existe un polynôme P tel que $\mathcal{D}$ est un P-changement de faces tétraèdriques de $\mathcal{R}$.*

Ainsi, par les Lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 et les Propositions 2.1, 2.4 et 2.6, nous déduisons le Théorème 3.1.

Remerciements. Les résultats de cette note ont été obtenus dans ma thèse [8] sous la direction de T. Fack que je tiens à remercier. Un théorème quelque peu similaire à 3.1 a été obtenu simultanément et indépendament dans [1].

Références bibliographiques

[1] I.L. Chatterji, On property (RD) for certain discret groups, Ph.D. thesis, Diss. ETH No. 4259, 2001.
[2] A. Connes, H. Moscovici, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, Topology 29 (3) (1990) 345–388.
[3] P. Jolissaint, K-theory of reduced C^*-algebras and rapidly decreasing functions on groups, K-Theory 2 (6) (1989) 723–735.
[4] P. Jolissaint, Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups, Trans. Amer. Math. Soc. 317 (1) (1990) 167–196.
[5] V. Lafforgue, Une démonstration de la conjecture de Baum–Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (T), C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 327 (5) (1998) 439–444.
[6] V. Lafforgue, A proof of property (*RD*) for cocompact lattices of $\mathrm{sl}(3, \mathbf{R})$ and $\mathrm{sl}(3, \mathbf{C})$, J. Lie Theory 10 (2) (2000) 255–267.
[7] J. Ramagge, G. Robertson, T. Steger, A Haagerup inequality for $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_1$ and $\tilde{A}_2$ buildings, Geom. Funct. Anal. 8 (4) (1998) 702–731.
[8] M. Talbi, Inégalité de Haagerup et géométrie des groupes, Ph.D. thesis, Univ. Lyon I, 2001.