C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 283–288

**Analyse numérique/*Numerical Analysis***

# Détermination des images d'un point de base d'une surface rationnelle tensorielle définie par des vecteurs massiques

**Olivier Gibaru [a,1], Jean-Charles Fiorot [b]**

[a] École nationale supérieure d'Arts & Métiers de Lille, Laboratoire L2MA, 8, Boulevard Louis XIV, 59046 Lille cedex, France

[b] Université de Valenciennes, ENSIMEV, Laboratoire MACS, 59313 Valenciennes cedex, France

**Reçu et accepté le 13 mai 2002**

**Note présentée par Philippe G. Ciarlet.**

**Résumé** Dans cette Note, nous montrons que l'image d'un point de base d'une surface rationnelle tensorielle de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de courbes rationnelles de $\mathbb{R}^3$. Un point de base est une valeur des paramètres telle que la surface rationnelle présente la valeur $(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0})$ (*cf.* [4,5]). Ce résultat formulé par Clebsch dans [1] est ici revisité, dans le cadre de la géométrie de la CAO, *via* le formalisme des vecteurs massiques introduit par Fiorot et Jeannin dans [3]. Nous donnons explicitement ces courbes rationnelles à l'aide de leurs vecteurs massiques. Ceux-ci sont proportionnels aux vecteurs massiques dont les indices appartiennent au polygone de Newton de la surface. De plus, contrairement à ce qui est fait classiquement en géométrie algébrique, nous montrons qu'en appliquant un changement de variables avec des exposants fractionnaires, il est possible d'obtenir directement n'importe quelle courbe image du point de base, sans être obligé d'effectuer des changements de variables successifs. ***Pour citer cet article : O. Gibaru, J.-C. Fiorot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 283–288.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Determination of the images of a base point of a tensorial rational surface defined by massic vectors

**Abstract** In this Note, we demonstrate that the image of a base point of a rational surface defined in $\mathbb{R}^3$ is a set of rational curves defined in $\mathbb{R}^3$. A base point is a parameter value for which the rational parametrization takes the value of $(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0})$ (*see* [4,5]). This result was studied by Clebsch in [1]. Here, we use the formalism of massic vectors introduced by Fiorot and Jeannin in [3]. This allows us to give explicitly these rational curves *via* their massic vectors. These massic vectors are proportional to those whose indices belong to the Newton polygon of the surface. Moreover, it is shown that by using fractional changes of variables, it is possible to obtain any image curve directly without having to apply successive changes of variables as usually done in algebraic geometry. ***To cite this article: O. Gibaru, J.-C. Fiorot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 283–288.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*Adresses e-mail :* Olivier.Gibaru@lille.ensam.fr (O. Gibaru); fiorot@univ-valenciennes.fr (J.-C. Fiorot).


S1631-073X(02)02465-2/FLA

## *Abridged English version*

Consider a rational surface defined by $\theta = (\theta_{ij})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}}$, a set of massic vectors, where at least $\theta_{00} = \vec{0}$. We define the set $\mathcal{A} = \{p_{ij} = (i,j) : \theta_{ij} \neq \vec{0}\}$ of integer points in the plane $\mathbb{R}^2$ whose coordinates are the pairs of indices of the set of non-zero massic vectors. The point $Q \in \mathcal{A}$ is said to be an extreme point if there does not exist two different points $q_1$ and $q_2$ belonging to $\mathcal{A}$ such that $Q \in ]q_1, q_2[$. Let $Q_0, Q_1, \ldots, Q_q$ be the extreme points of $\mathcal{A}$, the convex hull of $\mathcal{A}$ is defined by $\mathrm{Conv}(\mathcal{A}) := \{\lambda_0 Q_0 + \cdots + \lambda_q Q_q,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ : \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. The set of extreme points of $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$, denoted by $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{\bar{l}}\}$ which is included in the set $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_q\}$ of the extreme points of $\mathcal{A}$, with $\bar{l} \leqslant q$, define the Newton polygon (*see* [2]) of the SBR-surface $SBR[\theta]$, denoted by $Newton(SBR[\theta])$. We denote by $(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 0, \ldots, \bar{l}$, the integer coordinates of $\mathcal{P}_i$. Let us assume that $\mathcal{P}_0 = (\alpha_0 \neq 0, \beta_0 = 0)$ is the point such that $\alpha_0$ is the lowest value with $y = 0$ and $\mathcal{P}_m = (\alpha_m = 0, \beta_m \neq 0)$ is the point such that $\beta_m$ is the lowest value with $x = 0$. This implies that $\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{\alpha_i-\alpha_{i+1}} > \frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}-\alpha_i}$ for $i = 1, \ldots, m-1$ where $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ and $\beta_{i+1} > \beta_i$ for $i = 0, \ldots, m-1$. We need to define further the complementary to the Newton polygon, denoted $\overline{Newton}(SBR[\theta])$, as the polygon whose vertices are $\{(0,0), \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m\}$.

With the assumptions that the mass of $\theta_{ij}$ is greater than or equal to zero for all $(i,j) \in \mathcal{A}$ except for $(i,j) \in \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{\bar{l}}\}$ where the mass of $\theta_{ij}$ is strictly greater than zero and among the massic vectors $\theta_{i0}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (respectively among the massic vectors $\theta_{0j}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$) there exists at least a non-zero massic vector $\theta_{\alpha_0,0}$ (respectively $\theta_{0,\beta_m}$) we come to the fundamental theorem: the image of the base point $(u,v) = (0,0)$ of the rational function $SBR[\theta] : [0,1]^2 \to \widetilde{\mathcal{E}}$, $(u,v) \mapsto SBR[\theta](u,v) = \Pi\big(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p B_i^n(u) B_j^p(v) * \theta_{ij}\big)$ is $m$ consecutive rational curves. They are respectively defined by the massic vectors $\theta_{ij}$ whose indices $(i,j)$ respectively belong to the $m$ segments $[\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_{s+1}]$ for $s = 0, \ldots, m-1$ of $Newton(SBR[\theta]) \cap \overline{Newton}(SBR[\theta])$. More precisely, these $m$ *BR*-curves are defined by $BR[\tau^{(s+1)}](t) = \Pi\big(\sum_{i=0}^{d_s} B_i^{d_s}(t) * \tau_i^{(s+1)}\big)$, where $\tau_i^{(s+1)} = \frac{\binom{n}{\alpha_s - i\frac{\alpha_s-\alpha_{s+1}}{d_s}}\binom{p}{\beta_s + i\frac{\beta_{s+1}-\beta_s}{d_s}}}{\binom{d_s}{i}} * \theta_{\alpha_s - i\frac{\alpha_s-\alpha_{s+1}}{d_s},\, \beta_s + i\frac{\beta_{s+1}-\beta_s}{d_s}}$. The proof is either given by induction or by applying directly independent fractional changes of the variables.

---

### 1. Définition du polygone de Newton d'une surface (SBR)

Soit une surface rationnelle définie par l'ensemble des vecteurs massiques $\theta = (\theta_{ij})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}}$, où au moins $\theta_{00} = \vec{0}$. Nous notons $\mathcal{A} = \{p_{ij} = (i,j) : \theta_{ij} \neq \vec{0}\}$ l'ensemble des couples d'indices des vecteurs massiques non nuls.

DÉFINITION 1. – Un point $Q \in \mathcal{A}$ est dit point extrême s'il n'existe pas deux points différents $q_1$ et $q_2$ de $\mathcal{A}$ tels que $Q \in ]q_1, q_2[$.

DÉFINITION 2. – Soient $Q_0, Q_1, \ldots, Q_q$ des points extrêmes de $\mathcal{A}$, alors l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est définie par $\mathrm{Conv}(\mathcal{A}) := \{\lambda_0 Q_0 + \cdots + \lambda_q Q_q,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ : \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 3. – L'ensemble des points extrêmes $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{\bar{l}}\}$ de $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$, inclus dans l'ensemble $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_q\}$ des points extrêmes de $\mathcal{A}$ ($\bar{l} \leqslant q$), définit le polygone de Newton de la surface (*SBR*) paramétrée par $SBR[\theta] : [0,1]^2 \to \widetilde{\mathcal{E}}$

$$SBR[\theta](u,v) = \Pi\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} B_i^n(u) B_j^p(v) * \theta_{ij}\right), \tag{1}$$

où $B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ désigne le $i$ème polynôme de Bernstein de degré $n$ de la base des polynômes de degré $\leqslant n$ et $\widetilde{\mathcal{E}}$ désigne le complété projectif de l'espace affine $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^3$). Nous noterons par *Newton*(*SBR*[$\theta$]) ce polygone.

Nous notons par $(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 0, \ldots, \bar{l}$, les coordonnées entières des points $\mathcal{P}_i$. Supposons que $\mathcal{P}_0 = (\alpha_0 \neq 0, \beta_0 = 0)$ est le point de plus petite abscisse parmi les points de $\mathcal{A}$ d'ordonnée nulle et $\mathcal{P}_m = (\alpha_m = 0, \beta_m \neq 0)$ est le point de plus petite ordonnée parmi les points de $\mathcal{A}$ d'abscisse nulle. Il vient que $\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{\alpha_i-\alpha_{i+1}} > \frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}-\alpha_i}$ pour $i = 1, \ldots, m-1$ où $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ et $\beta_{i+1} > \beta_i$ pour $i = 0, \ldots, m-1$. Nous définissons le complémentaire du polygone de Newton de *SBR*[$\theta$], noté $\overline{\mathit{Newton}}(\mathit{SBR}[\theta])$, comme étant le polygone dont les sommets sont définis par les points $\{(0,0), \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m\}$.

Chaque segment $[\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_{s+1}]$, pour $s = 0, \ldots, m-1$, de Conv($\mathcal{A}$) admet le vecteur normal orienté vers l'intérieur du domaine, $\vec{n}_s = \left(\frac{\beta_{s+1}-\beta_s}{d_s}, \frac{\alpha_s-\alpha_{s+1}}{d_s}\right)$ où $d_s$ est le plus grand commun diviseur des entiers $\beta_{s+1}-\beta_s$ et $\alpha_s-\alpha_{s+1}$. Notons que $d_s+1$ correspond au nombre de points entiers sur le segment $[\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_{s+1}]$.

## 2. Images d'un point de base d'une surface (SBR)

Supposons que parmi les vecteurs massiques $\theta_{i0}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (respectivement parmi les vecteurs massiques $\theta_{0j}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$), il existe au moins un vecteur massique non nul $\theta_{\alpha_0,0}$ (respectivement $\theta_{0,\beta_m}$) et que la masse de $\theta_{ij}$ soit supérieure ou égale à zéro pour tout $(i,j) \in \mathcal{A}$ sauf pour $(i,j) \in \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{\bar{l}}\}$ où la masse de $\theta_{ij}$ est supérieure strictement à zéro alors nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. – *Avec ces hypothèses et les notations de la Section* 1*, l'image du point de base* $(u,v) = (0,0)$ *de l'application rationnelle SBR*[$\theta$] *définie par* (1) *est* $m$ *courbes rationnelles consécutives. Elles sont définies respectivement par les vecteurs massiques* $\theta_{ij}$ *dont les couples d'indices* $(i,j)$ *appartiennent aux* $m$ *segments* $[\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_{s+1}]$ *pour* $s = 0, \ldots, m-1$*. Plus précisément ces* $m$ *courbes rationnelles mises sous la forme* (*BR*) *sont* $BR[\tau^{(s+1)}](t) = \Pi\left(\sum_{i=0}^{d_s} B_i^{d_s}(t) * \tau_i^{(s+1)}\right)$*, où*

$$\tau_i^{(s+1)} = \frac{\binom{n}{\alpha_s - i\frac{\alpha_s-\alpha_{s+1}}{d_s}}\binom{p}{\beta_s + i\frac{\beta_{s+1}-\beta_s}{d_s}}}{\binom{d_s}{i}} * \theta_{\alpha_s - i\frac{\alpha_s-\alpha_{s+1}}{d_s}, \beta_s + i\frac{\beta_{s+1}-\beta_s}{d_s}}. \tag{2}$$

*Remarque* 5. – La preuve par récurrence se fait par application à *SBR*[$\theta$] de $m$ changements de variables polynomiaux succcessifs pour mettre en évidence les courbes images du point de base. L'hypothèse de récurrence est relative aux vecteurs massiques, dont les couples d'indices sont situés sur les frontières communes des polygones de Newton et de leur complémentaire des surfaces rationnelles issues de l'application de ces changements de variables successifs. Nous montrons ensuite, par application du lemme ci-dessous, que les différents vecteurs massiques des courbes images du point de base $(u,v) = (0,0)$ satisfont (2).

*Remarque* 6. – Si la surface (SBR) présente un point de base autre que $(u,v) = (0,0)$, il est possible de se ramener à ce cas *via* un changement affine des paramètres.

LEMME 7. – *Soient* $\theta = (\theta_i)_{0 \leqslant i \leqslant d_0}$ *et* $\tau = (\tau_j)_{0 \leqslant j \leqslant d_0 p}$ ($d_0, p \in \mathbb{N}^*$) *deux ensembles de vecteurs massiques tels que pour tout* $j = 0, \ldots, d_0 p$, $\tau_j = \frac{\binom{d_0}{j/p}}{\binom{d_0 p}{j}} * \theta_{j/p}$ *si* $j$ *est un multiple de* $p$ *et* $\tau_j = \vec{0}$ *sinon, alors* $BR[\theta](u) = \Pi\left(\sum_{i=0}^{d_0} B_i^{d_0}(u) * \theta_i\right)$ *pour* $u \in [0,1]$*, et* $BR[\tau](t) = \Pi\left(\sum_{j=0}^{d_0 p} B_j^{d_0 p}(t) * \tau_j\right)$ *pour* $t \in [0,1]$*, admettent le même arc de courbe rationnelle support.*

La démonstration de ce lemme s'établit en remplaçant $u$ par la valeur $t^p/(t^p + (1-t)^p)$ dans $BR[\theta](u)$.

*Preuve du théorème.* – Définissons la récurrence : nous notons $\alpha_s^{(0)} = \alpha_s$, $\beta_s^{(0)} = \beta_s$, $d_s^{(0)} = d_s$ pour $s = 0, \ldots, m$ et $\theta^{(\bar{k})}$ la grille des vecteurs massiques de la surface (SBR) définie par $SBR[\theta^{(\bar{k})}] = SBR[\theta] \circ$

$\varphi^{(1)} \circ \varphi^{(2)} \circ \cdots \varphi^{(\bar{k})}$ où

$$\varphi^{(j)}(t,r) = \left(r^{\beta_1^{(j-1)}/d_0^{(j-1)}}(1-t)^{\beta_1^{(j-1)}}, r^{(\alpha_0^{(j-1)}-\alpha_1^{(j-1)})/d_0^{(j-1)}} t^{\alpha_0^{(j-1)}-\alpha_1^{(j-1)}}\right) \quad \text{pour } j = 1, \ldots, \bar{k}.$$

Nous supposons que l'origine et les points $\mathcal{P}_s^{(\bar{k})} = (\alpha_s^{(\bar{k})}, \beta_s^{(\bar{k})})$, pour $s = 0, \ldots, m - \bar{k}$, constituent les sommets de $\overline{Newton}(SBR[\theta^{(\bar{k})}])$ où $\alpha_s^{(\bar{k})} = \alpha_{s+1}^{(\bar{k}-1)} \beta_1^{(\bar{k}-1)}$, $\beta_s^{(\bar{k})} = \frac{\beta_1^{(\bar{k}-1)}\alpha_{s+1}^{(\bar{k}-1)} + (\alpha_0^{(\bar{k}-1)} - \alpha_1^{(\bar{k}-1)})\beta_{s+1}^{(\bar{k}-1)} - \alpha_0^{(\bar{k}-1)}\beta_1^{(\bar{k}-1)}}{d_0^{(\bar{k}-1)}}$ et $d_s^{(\bar{k})} = pgcd(\alpha_s^{(\bar{k})} - \alpha_{s+1}^{(\bar{k})}, \beta_{s+1}^{(\bar{k})} - \beta_s^{(\bar{k})})$. Le polygone $\overline{Newton}(SBR[\theta^{(\bar{k})}])$ ainsi défini, comporte donc $\bar{k}$ côtés en moins par rapport à celui de $\overline{Newton}(SBR[\theta])$. De plus, nous supposons que les vecteurs massiques dont les couples d'indices appartiennent à $Newton(SBR[\theta^{(\bar{k})}]) \cap \overline{Newton}(SBR[\theta^{(\bar{k})}])$, sont définis pour $s = 0, \ldots, m - \bar{k} - 1$, et $i = 0, \ldots, d_s^{(\bar{k})}$ par :

$$\theta_{kl}^{(\bar{k})} = \frac{\binom{n}{\alpha_{s+\bar{k}}^{(0)} - i\frac{\alpha_{s+\bar{k}}^{(0)} - \alpha_{s+\bar{k}+1}^{(0)}}{d_s^{(\bar{k})}}}\binom{p}{\beta_{s+\bar{k}}^{(0)} + i\frac{\beta_{s+\bar{k}+1}^{(0)} - \beta_{s+\bar{k}}^{(0)}}{d_s^{(\bar{k})}}}}{\binom{n_{\bar{k}}}{\alpha_s^{(\bar{k})} - i\frac{\alpha_s^{(\bar{k})} - \alpha_{s+1}^{(\bar{k})}}{d_s^{(\bar{k})}}}\binom{p_{\bar{k}}}{\beta_s^{(\bar{k})} + i\frac{\beta_{s+1}^{(\bar{k})} - \beta_s^{(\bar{k})}}{d_s^{(\bar{k})}}}} * \theta_{\alpha_{s+\bar{k}}^{(0)} - i\frac{\alpha_{s+\bar{k}}^{(0)} - \alpha_{s+\bar{k}+1}^{(0)}}{d_s^{(\bar{k})}}, \beta_{s+\bar{k}}^{(0)} + i\frac{\beta_{s+\bar{k}+1}^{(0)} - \beta_{s+\bar{k}}^{(0)}}{d_s^{(\bar{k})}}} \tag{3}$$

si $d_s^{(\bar{k})}/d_{s+\bar{k}}^{(0)}$ divise $i$ et par $\theta_{kl}^{(\bar{k})} = \vec{0}$ sinon, où $k = \alpha_s^{(\bar{k})} - i(\alpha_s^{(\bar{k})} - \alpha_{s+1}^{(\bar{k})})/d_s^{(\bar{k})}$ et $l = \beta_s^{(\bar{k})} + i(\beta_{s+1}^{(\bar{k})} - \beta_s^{(\bar{k})})/d_s^{(\bar{k})}$.

Pour la valeur $\bar{k} = 1$, $SBR[\theta] \circ \varphi^{(1)}(t,r)$ s'écrit dans la base des polynômes de Bernstein de degrés $n_1$ en $t$ et $p_1$ en $r$ par :

$$SBR\left[\theta^{(1)}\right](t,r) = SBR[\theta] \circ \varphi^{(1)}(t,r) = \Pi\left(\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{p_1} B_k^{n_1}(t) B_l^{p_1}(r) * \theta_{kl}^{(1)}\right),$$

après factorisation et simplification par $r^{\alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)}/d_0^{(0)}}$ (car $\forall (i,j) \in \mathcal{A},\ i\beta_1^{(0)} + j(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)}) \geqslant \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)}$), où nous posons $n_1 = n\beta_1^{(0)} + p(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})$, $p_1 = n\beta_1^{(0)}/d_0^{(0)} + p(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})/d_0^{(0)} - \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)}/d_0^{(0)}$ et

$$\theta_{kl}^{(1)} = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{\min(d_0^{(0)}i + \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)}, k)} \frac{\binom{l}{i}\binom{n}{\frac{j}{\beta_1^{(0)}}}\binom{p}{\frac{d_0^{(0)}i + \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)} - j}{\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)}}}\binom{n_1 - d_0^{(0)}i - \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)}}{k-j}}{\binom{n_1}{k}\binom{p_1}{i}} * \omega_{j/\beta_1^{(0)}, i},$$

avec

$$\omega_{j/\beta_1^{(0)}, i} = \begin{cases} \Delta^{\frac{j}{\beta_1^{(0)}}, \frac{d_0^{(0)}i + \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)} - j}{\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)}}} \theta_{00} & \text{si } \left(\frac{j}{\beta_1^{(0)}}, \frac{d_0^{(0)}i + \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)} - j}{\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)}}\right) \in \mathcal{A}, \\ \vec{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\theta_{ij} = \vec{0}$ pour tout $s = 0, \ldots, m-1$ et tout $(i,j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, p\}$ tels que $i(\beta_{s+1}^{(0)} - \beta_s^{(0)}) + j(\alpha_s^{(0)} - \alpha_{s+1}^{(0)}) < \alpha_s^{(0)}\beta_{s+1}^{(0)} - \alpha_{s+1}^{(0)}\beta_s^{(0)}$ alors $\omega_{j/\beta_1^{(0)}, i} = \vec{0}$ pour tout $s = 1, \ldots, m-1$ et tout $(i,j) \in \{0, \ldots, n_1\} \times \{0, \ldots, p_1\}$ tels que

$$\frac{j}{\beta_1^{(0)}}\left(\beta_{s+1}^{(0)} - \beta_s^{(0)}\right) + \frac{d_0^{(0)}i + \alpha_0^{(0)}\beta_1^{(0)} - j}{\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)}}\left(\alpha_s^{(0)} - \alpha_{s+1}^{(0)}\right) < \alpha_s^{(0)}\beta_{s+1}^{(0)} - \alpha_{s+1}^{(0)}\beta_s^{(0)}.$$

Il vient que $\theta_{kl}^{(1)} = \vec{0}$ pour tout $(k,l) \in \{0,\ldots,n_1\} \times \{0,\ldots,p_1\}$ avec pour $s = 0,\ldots,m-2$, $k(\beta_{s+1}^{(1)} - \beta_s^{(1)}) + l(\alpha_s^{(1)} - \alpha_{s+1}^{(1)}) < \alpha_s^{(1)}\beta_{s+1}^{(1)} - \alpha_{s+1}^{(1)}\beta_s^{(1)}$ (*cf.* les notations de l'hypothèse de récurrence avec $\bar{k} = 1$).

Après calculs, nous montrons pour tout $(k,l)$ tels que $k(\beta_{s+1}^{(1)} - \beta_s^{(1)}) + l(\alpha_s^{(1)} - \alpha_{s+1}^{(1)}) = \alpha_s^{(1)}\beta_{s+1}^{(1)} - \alpha_{s+1}^{(1)}\beta_s^{(1)}$ que la relation de récurrence (3) est satisfaite pour $\bar{k} = 1$.

Notons que

$$\frac{d_s^{(1)}}{d_{s+1}^{(0)}} = pgcd\left(\frac{(\alpha_{s+1}^{(0)} - \alpha_{s+2}^{(0)})\beta_1^{(0)}}{d_{s+1}^{(0)}}, \frac{\beta_1^{(0)}(\alpha_{s+2}^{(0)} - \alpha_{s+1}^{(0)}) + (\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})(\beta_{s+2}^{(0)} - \beta_{s+1}^{(0)})}{d_0^{(0)} d_{s+1}^{(0)}}\right) \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, $\overline{Newton}(SBR[\theta^{(1)}])$ défini par les sommets $\{(0,0), \mathcal{P}_0^{(1)}, \mathcal{P}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}^{(1)}\}$ admet 1 côté en moins par rapport à $\overline{Newton}(SBR[\theta])$. En prenant $r = 0$ dans l'expression de $SBR[\theta^{(1)}](t,r)$ il vient après calculs :

$$SBR[\theta] \circ \varphi^{(1)}(t,0) = \Pi\left(\sum_{j=0}^{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})\beta_1^{(0)}} B_j^{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})\beta_1^{(0)}}(t) * \tau_j\right), \quad \forall t \in [0,1],$$

où

$$\tau_j = \frac{\binom{n}{\alpha_0^{(0)} - j/\beta_1^{(0)}}\binom{p}{j/(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})}}{\binom{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})\beta_1^{(0)}}{j}} * \theta_{\alpha_0^{(0)} - \frac{j}{\beta_1^{(0)}}, \frac{j}{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})}}$$

si $j$ est un multiple de $\frac{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})\beta_1^{(0)}}{d_0^{(0)}}$ et $\tau_j = \vec{0}$ sinon.

En appliquant le lemme avec ici $p = \frac{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})\beta_1^{(0)}}{d_0^{(0)}}$ et $d_0 = d_0^{(0)}$, nous obtenons que la courbe image du point de base $(u,v) = (0,0)$ à l'étape $\bar{k} = 1$ est définie par la courbe rationnelle de degré plus faible suivante :

$$BR\big[\tau^{(1)}\big](t) = \Pi\left(\sum_{i=0}^{d_0^{(0)}} B_i^{d_0^{(0)}}(t) * \tau_i^{(1)}\right), \quad \forall t \in [0,1],$$

où $\tau_i^{(1)} = \frac{\binom{n}{\alpha_0^{(0)} - i(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})/d_0^{(0)}}\binom{p}{i\frac{\beta_1^{(0)}}{d_0^{(0)}}}}{\binom{d_0^{(0)}}{i}} \theta_{\alpha_0^{(0)} - i\frac{(\alpha_0^{(0)} - \alpha_1^{(0)})}{d_0^{(0)}}, i\frac{\beta_1^{(0)}}{d_0^{(0)}}}$ pour $i = 0,\ldots,d_0^{(0)}$.

En supposant l'hypothèse de récurrence satisfaite jusqu'à l'ordre $\bar{k} - 1$, il vient, après calculs, et en appliquant la même démarche que celle pour $\bar{k} = 1$, que les vecteurs massiques dont les indices appartiennent à $Newton(SBR[\theta^{(\bar{k})}]) \cap \overline{Newton}(SBR[\theta^{(\bar{k})}])$ satisfont l'hypothèse de récurrence (3) à l'ordre $\bar{k}$ et que ce polygone comporte 1 côté de moins que celui de $\overline{Newton}(SBR[\theta^{(\bar{k}-1)}])$ et par là-même $\bar{k}$ côtés de moins que $\overline{Newton}(SBR[\theta])$. De plus, en utilisant l'hypothèse de récurrence sur les vecteurs massiques $\theta^{(\bar{k}-1)}$ et en appliquant de nouveau le Lemme avec ici $p = (\alpha_0^{(\bar{k}-1)} - \alpha_1^{(\bar{k}-1)})\beta_1^{(\bar{k}-1)}/d_{\bar{k}-1}^{(0)}$ et $d_0 = d_{\bar{k}-1}^{(0)}$, nous obtenons la $\bar{k}$ème courbe (BR) image du point de base suivante :

$$SBR[\theta] \circ \varphi^{(1)} \circ \cdots \circ \varphi^{(\bar{k})}(t,0) = \Pi\left(\sum_{i=0}^{d_{\bar{k}-1}^{(0)}} B_i^{d_{\bar{k}-1}^{(0)}}(t) * \tau_i^{(\bar{k})}\right),$$

où

$$\tau_i^{(\bar{k})} = \frac{\binom{n}{\alpha_{\bar{k}-1}^{(0)} - i\frac{\alpha_{\bar{k}-1}^{(0)} - \alpha_{\bar{k}}^{(0)}}{d_{\bar{k}-1}^{(0)}}} \binom{p}{\beta_{\bar{k}-1}^{(0)} + i\frac{\beta_{\bar{k}}^{(0)} - \beta_{\bar{k}-1}^{(0)}}{d_{\bar{k}-1}^{(0)}}}}{\binom{d_{\bar{k}-1}^{(0)}}{i}} * \theta_{\alpha_{\bar{k}-1}^{(0)} - i\frac{\alpha_{\bar{k}-1}^{(0)} - \alpha_{\bar{k}}^{(0)}}{d_{\bar{k}-1}^{(0)}},\, \beta_{\bar{k}-1}^{(0)} + i\frac{\beta_{\bar{k}}^{(0)} - \beta_{\bar{k}-1}^{(0)}}{d_{\bar{k}-1}^{(0)}}}$$

Cette relation de récurrence est nécessairement limitée à $\bar{k} = m$ étapes car $\overline{Newton}(SBR[\theta^{(m)}])$ se réduit alors au point $(0,0)$. Comme $\tau_{d_{\bar{k}-1}^{(0)}}^{(\bar{k})} = \tau_0^{(\bar{k}+1)}$ pour $\bar{k} = 1, \ldots, m-1$, les courbes (BR) images du point de base sont donc consécutives. □

THÉORÈME 8. – *Les $m$ courbes rationnelles images du point de base $(u, v) = (0, 0)$ de la surface rationnelle $SBR[\theta]$ peuvent être obtenues directement en effectuant les changements de variables à exposants rationnels suivants* :

$$\varphi_s(t, r) = \left(u = r^{(\beta_{s+1} - \beta_s)}(1-t)^{\frac{d_s}{\alpha_s - \alpha_{s+1}}},\ v = r^{(\alpha_s - \alpha_{s+1})} t^{\frac{d_s}{\beta_{s+1} - \beta_s}}\right), \quad pour\ s = 0, \ldots, m-1.$$

*Il vient, en posant $r = 0$, la forme* (2) *des vecteurs massiques de chaque courbe rationnelle image du point de base.*

[1] Auteur à contacter pour toute correspondance.

## Références bibliographiques


[1] A. Clebsch, Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung, Math. Ann. 1 (1869) 253–316.

[2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Using Algebraic Geometry, Springer, 1998.

[3] J.C. Fiorot, P. Jeannin, Courbes et surfaces rationnelles. Applications à la CAO, RMA12, Masson, Paris, 1989, English version: Rational Curves and Surfaces. Applications to CAD, Wiley, Chichester, 1992.

[4] J.C. Fiorot, O. Gibaru, Blowing up: application to $G^2$-continuous 8-sided filling patch, Numer. Math., à paraître.

[5] J.C. Fiorot, O. Gibaru, Modèle de surface de remplissage $G^2$-continu via un éclatement multiple en géométrie de la CAO, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 330 (2000) 1113–1118.