C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 301–306

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Mesure des variations infinitésimales des courbures principales d'une surface

Sylvia Anicic

Institut de mathématiques, École polytechnique fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Suisse

Reçu et accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On considère une surface S et un champ de vecteurs u défini sur S. On introduit un tenseur $\chi(u)$ qui permet de mesurer les variations infinitésimales des courbures principales de S induites par u. ***Pour citer cet article : S. Anicic, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 301–306.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Measure of the infinitesimal variations of the principal curvatures of a surface

Abstract We consider a surface S and a vector field u on S. We introduce a tensor $\chi(u)$ which measures the infinitesimal variations of the principal curvatures of S subject to u. ***To cite this article: S. Anicic, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 301–306.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

We use the Einstein convention for the summation of repeated indices with values of indices ranging in $\{1, 2\}$ for Greek symbols and in $\{1, 2, 3\}$ for Roman symbols.

Let ω be a domain of $\mathbb{R}^2$. We consider a surface $S = \varphi(\overline{\omega})$ defined by an injective map $\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. We denote $a_\alpha = \partial_\alpha \varphi$ the tangent vectors. We suppose that $\inf \mathrm{ess}_\omega |a_1 \times a_2| > 0$ and that the unit normal vector $a_3 = a_1 \times a_2/|a_1 \times a_2|$ belongs to $\mathrm{W}^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. The two vectors (a_α) form the covariant basis of the tangent plane of S at the point $\varphi(x)$. The two vectors (a^α) of the same tangent plane defined by the relations $a^\alpha \cdot a_\beta = \delta^\alpha_\beta$ constitute its contravariant basis. The metric tensor and the curvature tensor are respectively given by their covariant components $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$ and $b_{\alpha\beta} = -a_\alpha \cdot \partial_\beta a_3$. The contravariant components of the metric tensor are denoted $a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$. We also define the mixed components $b^\beta_\alpha = b_{\alpha\sigma} a^{\sigma\beta}$ of the curvature tensor. Let $1/R_\alpha$ be the two principal curvatures of S. The mean curvature H and Gaussian curvature K are defined in (1). We denote (s_α) an orthonormal basis of the tangent plane composed of the two principal directions of curvature s_α associate to $1/R_\alpha$ such that $s_1 \times s_2 = a_3$. Let us call such a basis a *principal basis*. We also define $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta}$. If $\varphi \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ then the Christoffel symbols $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ are given by $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} = \partial_\alpha a_\beta \cdot a^\sigma$.

Adresse e-mail : sylvia.anicic@epfl.ch (S. Anicic).

S1631-073X(02)02471-8/FLA

Let $u \in \mathrm{H}^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ be a vector field defined on S. We consider the family of deformed surfaces S_η defined by $\varphi + \eta u$ for sufficiently small $\eta \in \mathbb{R}$. The membrane strain tensor $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ (2) measures the infinitesimal variations of $a_{\alpha\beta}$. If u and φ are smooth enough, $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ (3) measures the infinitesimal variations of $b_{\alpha\beta}$. More precisely, the two identities (6) hold.

In this Note, we introduce the tensor $\chi(u) = \chi_{\alpha\beta}(u)a^\alpha \otimes a^\beta$ which measures the infinitesimal variations of the principal curvatures. To this end, we define the variational space V (4). For all $u \in V$, the covariant components $\chi_{\alpha\beta}(u)$ are given by

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}\big(\partial_\alpha\theta \cdot a_\beta + \partial_\beta\theta \cdot a_\alpha - b_\alpha^\rho \partial_\rho u \cdot a_\beta - b_\beta^\rho \partial_\rho u \cdot a_\alpha\big),$$

where $\theta = \partial_\alpha u \cdot a_3 a^\alpha$. If φ and the components u_i of u are smooth enough then $\chi_{\alpha\beta}(u)$ may be written as (7). In contrast with $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ which measures the infinitesimal variations of the covariant components $b_{\alpha\beta}$, the relation (8) shows that the term $\chi_{\alpha\beta}(u)$ measures the variations of the mixed components.

The main result of this Note is the following theorem.

THEOREM 0.1. – *Let $u \in V$ be a vector field defined on S. We consider the family S_η of deformed surfaces defined by $\{\varphi + \eta u, \eta \in \mathbb{R}\}$ where $|\eta|$ is sufficiently small. Then there exists a principal basis (s_1, s_2) of S such that for all $\alpha \in \{1, 2\}$,*

$$\begin{cases} \chi(u)s_\alpha \cdot s_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\dfrac{1}{R_\alpha}\right)(0), \\ \chi(u)s_1 \cdot s_2 = \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\eta}(0) \cdot s_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\right), \end{cases}$$

where $\sqrt{a} = |a_1 \times a_2|$.

In the particular case of a plane or a spherical portion, we deduce (10). Moreover, the components $\chi_{\alpha\beta}(u)$ depend only on the normal component u_3 of u and their expressions are given by the formula (11) if u_3 and φ are smooth enough.

COROLLARY 0.2. – *Let S be a spherical portion and let u be a smooth vector field on S such that the normal component u_3 vanishes on a part γ_0 of the boundary of S. If we consider the family of deformed surfaces defined by $\{\varphi + \eta u,\ \eta \in \mathbb{R}\}$ where $|\eta|$ is sufficiently small, then for all $\alpha \in \{1, 2\}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\big(\frac{1}{R_\alpha}\big)(0) = 0$ if and only if $u_3 = 0$ on S.*

1. Description de la surface

Les indices et exposants grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$ et les indices et exposants latins dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On utilise la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés. On note $u \cdot v$, $u \times v$, $u \otimes v$ et $|u|$ respectivement le produit scalaire euclidien, le produit vectoriel, le produit tensoriel et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

Soit ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^2$ de point courant $x = (x^\alpha)$. On pose $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. On considère une surface $S = \varphi(\overline{\omega})$ définie par une application injective $\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$. On note $a_\alpha = \partial_\alpha\varphi$ les deux vecteurs tangents à S. On suppose que

- $\inf \mathrm{ess}_\omega |a_1 \times a_2| > 0$,
- le vecteur unitaire normal $a_3 = a_1 \times a_2/|a_1 \times a_2|$ appartient à $\mathrm{W}^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$.

Les deux vecteurs (a_α) forment la base covariante du plan tangent de S au point $\varphi(x)$. La base contravariante (a^α) du plan tangent est définie par $a^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha$ où δ_β^α est le symbole de Krönecker. Les composantes covariantes du tenseur métrique $I = a_{\alpha\beta}a^\alpha \otimes a^\beta$ et du tenseur de courbure $I\!I = b_{\alpha\beta}a^\alpha \otimes a^\beta$ sont respectivement définies par $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$ et $b_{\alpha\beta} = -a_\alpha \cdot \partial_\beta a_3$. Les composantes mixtes du tenseur de courbure sont données par $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\rho}a^{\rho\beta}$. On note $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}$. Si $\varphi \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\omega;\mathbb{R}^3)$, on définit les symboles de Christoffel par $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma = \partial_\alpha a_\beta \cdot a^\sigma$. Soient $1/R_\alpha$ les deux courbures principales de S. La courbure moyenne H et la courbure gaussienne K sont définies par

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\big(b_1^1 + b_2^2\big), \qquad K = \frac{1}{R_1 R_2} = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1. \tag{1}$$

On note (s_α) une base orthonormée du plan tangent composée des deux directions principales de courbure s_α associées à $1/R_\alpha$ telles que $s_1 \times s_2 = a_3$. Cette base sera appelée *base principale*. Les courbures et directions principales de courbure sont intrinsèques à la surface, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du choix de (ω, φ) pour définir S.

2. Tenseurs surfaciques de déformation d'une surface

En théorie des coques, la déformation de la surface moyenne, lorsqu'elle est soumise à un champ de déplacement u, se mesure au moyen du tenseur de déformation membranaire $\gamma(u) = \gamma_{\alpha\beta}(u)a^\alpha \otimes a^\beta$ et du tenseur de changement de courbure $\Upsilon(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u)a^\alpha \otimes a^\beta$; voir [6]. Dans [4], Blouza et Le Dret définissent pour des champs $u \in \mathrm{H}^1(\omega;\mathbb{R}^3)$ les expressions des composantes covariantes $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ du tenseur de déformation membranaire

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha). \tag{2}$$

Si u et φ sont plus réguliers, plus précisément si $u \in V_B = \{u \in \mathrm{H}^1(\omega;\mathbb{R}^3) \mid \partial_{\alpha\beta} u \cdot a_3 \in \mathrm{L}^2(\omega)\}$ et si $\varphi \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\omega;\mathbb{R}^3)$, Blouza et Le Dret définissent les expressions des composantes du tenseur de changement de courbure

$$\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = \partial_{\alpha\beta} u \cdot a_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho u \cdot a_3. \tag{3}$$

Si l'on décompose $u = u_i a^i$ sur la base contravariante a^i et que l'on suppose que u_i et φ sont suffisamment réguliers, alors on obtient les expressions classiques des tenseurs de déformation membranaire et de changement de courbure

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta}(u) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3,\\
\Upsilon_{\alpha\beta}(u) &= \partial_{\alpha\beta}u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho u_3 - c_{\alpha\beta}u_3 + b_\beta^\rho u_{\rho|\alpha} + b_\alpha^\rho u_{\rho|\beta} + b_{\beta|\alpha}^\rho u_\rho,
\end{aligned}$$

où $u_{\alpha|\beta} = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho u_\rho$ et $b_{\beta|\alpha}^\rho = \partial_\alpha b_\beta^\rho + \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\rho$.

On montre maintenant que l'on peut définir $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ en tant qu'élément de $\mathrm{L}^2(\omega)$ pour des paramétrisations φ moins régulières que $\mathrm{W}^{2,\infty}$. On introduit l'espace suivant

$$V = \big\{u \in \mathrm{H}^1\big(\omega;\mathbb{R}^3\big),\ \partial_\alpha u \cdot a_3\, a^\alpha \in \mathrm{H}^1\big(\omega;\mathbb{R}^3\big)\big\} \tag{4}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_V = (\|u\|_1^2 + \|\partial_\alpha u \cdot a_3 a^\alpha\|_1^2)^{1/2}$ [2]. Dans l'expression de l'espace V, le terme $\partial_\alpha u \cdot a_3 a^\alpha$, appelé vecteur de rotation infinitésimale, mesure les variations de la normale unitaire a_3. En effet, si on considère la famille de surfaces déformées définies par $\varphi + \eta u$ pour $|\eta|$ suffisamment petit, alors $\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}\eta}(0) = -\partial_\alpha u \cdot a_3 a^\alpha$. Ce terme est donc intrinsèque, ce qui n'est pas le cas de $\partial_{\alpha\beta} u \cdot a_3$ dans V_B.

LEMME 2.1. – *Si $u \in V$ et si $\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\omega;\mathbb{R}^3)$ telle que* $\inf\mathrm{ess}_\omega |a_1 \times a_2| > 0$ *et $a_3 \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\omega,\mathbb{R}^3)$ alors les termes*

$$\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = \partial_\alpha\big(\partial_\rho u \cdot a_3 a^\rho\big) \cdot a_\beta - \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3 \tag{5}$$

sont symétriques par rapport à α et β. De plus, ils appartiennent à $\mathrm{L}^2(\omega)$ et coïncident avec les composantes du tenseur de changement de courbure (3) *lorsque $u \in V_B$ et $\varphi \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\omega;\mathbb{R}^3)$.*

Il est intéressant de noter que les expressions (5) de $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ ne font pas intervenir les symboles de Christoffel $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$.

Les termes $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ et $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ mesurent respectivement les variations linéarisées des composantes covariantes $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et du tenseur de courbure. Plus précisément, si l'on considère la famille de surfaces déformées S_η définies par $\{\varphi + \eta u, \eta \in \mathbb{R}\}$ pour $|\eta|$ suffisamment petit, alors

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}a_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\eta}(0) \quad \text{et} \quad \Upsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{\mathrm{d}b_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\eta}(0). \tag{6}$$

3. Mesure des courbures principales

On se propose d'introduire un tenseur $\chi(u) = \chi_{\alpha\beta}(u)a^\alpha \otimes a^\beta$ qui permet de mesurer les variations infinitésimales des courbures principales de S. Pour tout $u \in V$, on définit les composantes covariantes $\chi_{\alpha\beta}(u)$ de $\chi(u)$ par

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\theta \cdot a_\beta + \partial_\beta\theta \cdot a_\alpha - b^\rho_\alpha \partial_\rho u \cdot a_\beta - b^\rho_\beta \partial_\rho u \cdot a_\alpha),$$

où on a posé $\theta = \partial_\alpha u \cdot a_3\, a^\alpha$. Si l'on suppose que u et φ sont plus réguliers, alors en décomposant u sur la base contravariante a^i, on obtient :

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \partial_{\alpha\beta}u_3 - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\partial_\rho u_3 + c_{\alpha\beta}u_3 + b^\rho_{\beta|\alpha}u_\rho - \frac{b^\rho_\alpha}{2}(\partial_\rho u_\beta - \partial_\beta u_\rho) - \frac{b^\sigma_\beta}{2}(\partial_\sigma u_\alpha - \partial_\alpha u_\sigma). \tag{7}$$

Les composantes $\chi_{\alpha\beta}(u)$ sont une combinaison linéaire de $\Upsilon_{\alpha\beta}(u)$ et de $\gamma_{\alpha\beta}(u)$. Plus précisément, on montre que

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) - \big(b^\rho_\alpha \gamma_{\rho\beta}(u) + b^\rho_\beta \gamma_{\rho\alpha}(u)\big).$$

Remarque 1. – Le tenseur $\chi(u)$ est différent du tenseur de changement de courbure de Koiter–Sanders–Budiansky [5] dont les composantes covariantes sont données par

$$\widehat{K}_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) - \frac{1}{2}\big(b^\rho_\alpha \gamma_{\rho\beta}(u) + b^\rho_\beta \gamma_{\rho\alpha}(u)\big).$$

Une généralisation non linéaire de ce tenseur est donnée dans [1].

La proposition suivante montre que $\chi_{\alpha\beta}(u)$ fait intervenir les variations infinitésimales des composantes mixtes du tenseur de courbure [3].

PROPOSITION 3.1. – *Soit $u \in V$ un champ de déplacement sur S et S_η la famille de surfaces paramétrées par $\{\varphi + \eta u,\ \eta \in \mathbb{R}\}$ où $|\eta|$ est suffisamment petit. On a*

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}b^\rho_\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)a_{\rho\beta} + \frac{\mathrm{d}b^\rho_\beta}{\mathrm{d}\eta}(0)a_{\rho\alpha}\right). \tag{8}$$

Si $1/R_1 = 1/R_2$, alors

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \frac{\mathrm{d}b^\rho_\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)a_{\rho\beta}. \tag{9}$$

Le résultat principal de la Note est le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2. – *Soit $u \in V$ un champ de déplacement sur S et S_η la famille de surfaces paramétrées par $\{\varphi + \eta u,\ \eta \in \mathbb{R}\}$ où $|\eta|$ est suffisamment petit. Alors il existe une base propre (s_1, s_2) de S telle que,* *pour tout* $\alpha \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} \chi(u)s_\alpha \cdot s_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\dfrac{1}{R_\alpha}\right)(0), \\ \chi(u)s_1 \cdot s_2 = \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\eta}(0)\cdot s_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\right), \end{cases}$$

où $\sqrt{a} = |a_1 \times a_2|$.

4. Cas particulier d'un plan ou d'une portion sphérique

Dans ce cas, on a $1/R_1 = 1/R_2$. En appliquant le Théorème 3.2, on obtient

$$\chi(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \{1,2\},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{R_\alpha}\right)(0) = 0. \tag{10}$$

De plus, les composantes $\chi_{\alpha\beta}(u)$ ne dépendent que de la composante normale u_3 du déplacement u. On montre en effet que si u_3 et φ sont suffisamment réguliers alors

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = \partial_{\alpha\beta}u_3 - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\partial_\rho u_3 + c_{\alpha\beta}u_3. \tag{11}$$

Dans le cas d'un plan, on a simplement $\chi_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) = \partial_{\alpha\beta}u_3$. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.1. – *Soit une portion sphérique soumise à un champ de déplacement* $u \in V$ *tel que* $u_3 = 0$ *sur une partie* γ_0 *de son bord de mesure non nulle. Alors*

$$\forall \alpha \in \{1,2\},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{R_\alpha}\right)(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 = 0.$$

5. Démonstration du Théorème 3.2

Soit $\mathit{II}(\eta)$ le tenseur de courbure de S_η, $(s_1(\eta), s_2(\eta))$ une base propre et $\left(\frac{1}{R_1}(\eta), \frac{1}{R_2}(\eta)\right)$ les courbures principales associées. Le tenseur $\mathit{II}(\eta)$ est symétrique donc pour η suffisamment petit, on a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_\alpha}(\eta) = \dfrac{1}{R_\alpha} + \eta\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\dfrac{1}{R_\alpha}\right)(0) + \cdots, \\ s_\alpha(\eta) = s_\alpha + \eta\dfrac{\mathrm{d}s_\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0) + \cdots, \end{cases}$$

où (s_1, s_2) est une base propre de S et $\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right)$ les courbures principales associées. De la relation

$$\mathit{II}(\eta) = \frac{1}{R_1}(\eta)s_1(\eta)\otimes s_1(\eta) + \frac{1}{R_2}(\eta)s_2(\eta)\otimes s_2(\eta) = b_{\alpha\beta}(\eta)a^\alpha(\eta)\otimes a^\beta(\eta),$$

on déduit

$$\begin{aligned} I\frac{\mathrm{d}\mathit{II}}{\mathrm{d}\eta}(0)I &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{R_1}\right)(0)s_1\otimes s_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{R_2}\right)(0)s_2\otimes s_2 \\ &\quad + \frac{1}{R_1}\left(I\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\eta}(0)\otimes s_1 + s_1\otimes I\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\eta}(0)\right) + \frac{1}{R_2}\left(I\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}\eta}(0)\otimes s_2 + s_2\otimes I\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}\eta}(0)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}b_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\eta}(0)a^\alpha\otimes a^\beta + b_{\alpha\beta}\left(I\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)\otimes a^\beta + a^\alpha\otimes I\frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\eta}(0)\right). \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de $a^\alpha(\eta)$ en $\eta = 0$. On a $a^\alpha(\eta)\cdot a_\beta(\eta) = \delta^\alpha_\beta$ donc $\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)\cdot a_\beta + a^\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}a_\beta}{\mathrm{d}\eta}(0) = 0$. Or $\frac{\mathrm{d}a_\beta}{\mathrm{d}\eta}(0) = \partial_\beta u$ donc $I\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0) = \frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)\cdot a_\beta\, a^\beta = -(\partial_\beta u\cdot a^\alpha)a^\beta$. Posons $D(u) = \partial_\alpha u\otimes a^\alpha$. Alors $b_{\alpha\beta}(I\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)\otimes a^\beta + a^\alpha\otimes\frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\eta}(0)I) = -D^T(u)\mathit{II} - \mathit{II}D(u)$ et donc

$$I\frac{\mathrm{d}I\!I}{\mathrm{d}\eta}(0)I = \frac{\mathrm{d}b_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\eta}(0)a^\alpha \otimes a^\beta + b_{\alpha\beta}\left(I\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\eta}(0)\otimes a^\beta + a^\alpha \otimes \frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\eta}(0)I\right)$$
$$= \Upsilon(u) - D^T(u)I\!I - I\!ID(u) = \chi(u) + I\!I\gamma(u) + \gamma(u)I\!I - D^T(u)I\!I - I\!ID(u).$$

Puisque $\gamma(u) = \frac{1}{2}(ID(u) + D^T(u)I)$, on obtient

$$I\frac{\mathrm{d}I\!I}{\mathrm{d}\eta}(0)I = \chi(u) + \frac{I\!I}{2}\big(ID(u) + D^T(u)I\big) + \big(ID(u) + D^T(u)I\big)\frac{I\!I}{2} - D^T(u)I\!I - I\!ID(u)$$
$$= \chi(u) + \frac{I\!I}{2}\big(-D(u) + D^T(u)\big)I + I\big(D(u) - D^T(u)\big)\frac{I\!I}{2}.$$

Posons $T(u) = \frac{I\!I}{2}(-D(u) + D^T(u))I + I(D(u) - D^T(u))\frac{I\!I}{2}$ et calculons $T(u)s_\alpha \cdot s_\alpha$ ainsi que $T(u)s_1 \cdot s_2$. On a

$$T(u)s_\alpha \cdot s_\alpha = \frac{1}{2R_\alpha}\big(-D(u) + D^T(u) + D(u) - D^T(u)\big)s_\alpha \cdot s_\alpha = 0,$$
$$T(u)s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-D(u) + D^T(u)}{R_2} + \frac{D(u) - D^T(u)}{R_1}\right)s_1 \cdot s_2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\big(D(u) - D^T(u)\big)s_1 \cdot s_2.$$

Calculons $(D(u) - D^T(u))s_1 \cdot s_2$.

$$\big(D(u) - D^T(u)\big)s_1 \cdot s_2 = (\partial_1 u \cdot a_2 - \partial_2 u \cdot a_1)\big(a^2 \otimes a^1 - a^1 \otimes a^2\big)s_1 \cdot s_2$$
$$= (\partial_1 u \cdot a_2 - \partial_2 u \cdot a_1)\big(\big(s_1 \cdot a^1\big)\big(s_2 \cdot a^2\big) - \big(s_1 \cdot a^2\big)\big(s_2 \cdot a^1\big)\big)$$
$$= (\partial_1 u \cdot a_2 - \partial_2 u \cdot a_1)\big((s_1 \times s_2) \cdot \big(a^1 \times a^2\big)\big).$$

Comme $s_1 \times s_2 = a_3$ et $a_3 \cdot a^1 \times a^2 = 1/\sqrt{a}$ alors $(D(u) - D^T(u))s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$. Il en résulte que

$$\frac{\mathrm{d}I\!I}{\mathrm{d}\eta}(0)s_\alpha \cdot s_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{R_\alpha}\right)(0) = \chi(u)s_\alpha \cdot s_\alpha,$$
$$\frac{\mathrm{d}I\!I}{\mathrm{d}\eta}(0)s_1 \cdot s_2 = \chi(u)s_1 \cdot s_2 + \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

D’autre part,

$$\frac{\mathrm{d}I\!I}{\mathrm{d}\eta}(0)s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{R_1}\left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\eta}(0) \cdot s_2\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}\eta}(0) \cdot s_1\right) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\eta}(0) \cdot s_2.$$

Références bibliographiques

[1] A. Acharya, A nonlinear generalization of the Koiter–Sanders–Bubiansky bending strain measure, Int. J. Solids Structures 37 (2000) 5517–5528.

[2] S. Anicic, Du modèle de Kirchhoff–Love exact à un modèle de coque mince et à un modèle de coque pliée, Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2001.

[3] S. Anicic, A. Léger, Formulation bidimensionnelle exacte du modèle de coque 3D de Kirchhoff–Love, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 329 (1999) 741–746.

[4] A. Blouza, H. Le Dret, Sur le lemme du mouvement rigide, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 319 (1994) 1127–1132.

[5] B. Budiansky, J.L. Sanders, On the “best” first-order linear shell theory, in: Progr. Appl. Mech., Prager Anniversary Volume, 1963, pp. 129–140.

[6] P.G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Vol. III: Theory of Shells, North-Holland, Amsterdam, 2000.