C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 405–410

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Propagation de flammes gazeuses dans la limite d'une diffusion massique nulle

Frédérique Laurent, Marc Massot, Vitaly Volpert

MAPLY, Labo. de math. appliquées de Lyon, UMR 5585 CNRS, Université Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 21 mai 2002 ; accepté le 1er juillet 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé Dans cette Note, on considère un modèle de type thermo-diffusif pour décrire la propagation d'une flamme 1D dans un milieu gazeux avec une chimie complexe de type graphe ouvert. On redémontre l'existence d'ondes progressives pour ce type de système en utilisant une nouvelle approche et l'on étudie l'effet du passage à la limite d'une diffusion massique nulle : on montre la continuité de la vitesse de l'onde ainsi que des profils de température et de fraction massique. ***Pour citer cet article : F. Laurent et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 405–410.***

Propagation of gaseous flames in the limit of small mass diffusion coefficients

Abstract In this Note, we study a thermo-diffusive model for the propagation of 1D gaseous flames for complex chemistry with open graph. We use a new approach in order to prove the existence of a traveling wave and we study the behavior of the solution in the limit of zero mass diffusion coefficients: we show the continuity of the wave velocity and of the temperature and mass fraction profiles. ***To cite this article: F. Laurent et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 405–410.***

Abridged English version

The existence of 1D traveling wave has been widely studied, for example for one step chemistry in [1] and for a complex chemistry network of irreversible exothermic reactions as in [10]. In [3], the existence of a traveling wave is shown for a complex chemistry network of reversible reactions and with detailed transport. Various tools have been used such as the Leray–Schauder degree in [1] and [3] in order to prove the existence in bounded domain, the solution being then extended to the whole real line, or such as the topological degree directly defined for unbounded domains [10]. In the high activation energy asymptotics, the wave velocity was found in both cases, without [8] and with mass diffusion [11]. This asymptotical value tends to infinity when the mass diffusion coefficient tends to zero. It is shown however in [6] that, for a one-step finite rate chemistry, the wave velocity admits a finite limit.

Adresses e-mail : laurent@maply.univ-lyon1.fr (F. Laurent); massot@maply.univ-lyon1.fr (M. Massot); volpert@maply.univ-lyon1.fr (V. Volpert).

S1631-073X(02)02487-1/FLA

In this Note, a new method is introduced in order to prove the existence of 1D traveling waves with a network of irreversible exothermic reactions which satisfies the open graph assumption [10], using a topological degree defined for unbounded domains as in [10]. The equations for the thermo-diffusive model are given by (1), (2). We study the behavior of the wave velocity and of the temperature and mass fraction profiles when the mass diffusion coefficient tends to zero, then extending the results of [6]. For clarity of the presentation, results are presented for a simpler system which preserves the main difficulty. It corresponds to a nth order reaction, with $n \geqslant 1$:

$$(\mathcal{S}_d)\quad \begin{cases} \kappa\theta'' + c\theta' + \tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n = 0, \\ d\alpha'' + c\alpha' + \tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\theta(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0, \end{cases}$$

where θ is the reduced temperature (it is 0 for the cold mixture and 1 for the burned gases) and α is the mass fraction of the reaction product. The Lewis number $\mathrm{Le} = \kappa/d$ is assumed bigger than 1. The function $\tilde{k}$ is regular and close to the Arrhenius coefficient; in order to avoid the cold boundary problem [11], we introduce an ignition temperature $\theta_c > 0$.

In order to prove the existence of solution for the system $(\mathcal{S}_d)$, we use the topological degree defined in [9] for elliptic, Fredholm and proper operators in unbounded domain and weighted Hölder spaces, where the weight is polynomial. Here, the spaces are $\mathrm{C}^{2+\delta}_{\mu}(\mathbb{R})$ and $\mathrm{C}^{\delta}_{\mu}(\mathbb{R})$, with $\mu(x) = 1 + x^2$. In order to use this theory, we add a small positive parameter ε and introduce the secondary system:

$$(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})\quad \begin{cases} \kappa\theta'' + c\theta' + (1-\varepsilon)\tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n + \varepsilon\tilde{k}(\theta)(1-\alpha) + \varepsilon^2\tilde{k}(\theta)(\alpha-\theta) = 0, \\ d\alpha'' + c\alpha' + (1-\varepsilon)\tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n + \varepsilon\tilde{k}(\theta)(1-\alpha) = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\theta(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0. \end{cases}$$

After a change of variable $(t, a) = (\zeta\theta, \zeta\alpha)$, where $\zeta(x)$ is a regular function equal to 1 for $x \leqslant 0$ and to $e^{\lambda x}$ for $x \geqslant 1$, and a fonctionnalization of c [9], we can define and use the topological degree for the corresponding operator. In order to determine λ, to prove the existence of solution for system $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ and to pass to the limit as ε and then d tend to zero, we need a priori estimates in the Hölder space for the functions θ and α, independent of ε and d. They are given, for $d \in]0, \kappa]$ and for small $\varepsilon \geqslant 0$, in Proposition 2.1 and Theorem 2.2. We then introduce an homotopy changing d to κ; this yields an operator of known topological degree: for $d = \kappa$, the system actually reduces to a one equation system; we know that it admits a unique solution and its topological degree is easy to evaluate: it is 1 or -1. Using estimates in the weighted Hölder space of Theorem 3.2 and the property of the topological degree, we prove the existence of solution for $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ in Theorem 3.3.

Because of the a priori estimates, we can pass to the limit in $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ when ε and then d tends to zero, and we obtain the main result of this Note in Theorem 4.1: the existence of solution c_d, θ_d and α_d of $(\mathcal{S}_d)$, the existence of solution c, θ and α of $(\mathcal{S}_0)$ and the convergence of c_d, θ_d and α_d to c, θ and α when d tends to 0, if we have the unicity of $(\mathcal{S}_0)$ (otherwise, there is only convergence of subsequence). The technique developed here allow us to tackle more complex problem such as the existence of plane polydispersed spray flames [5].

1. Introduction

On s'intéresse à la propagation de flamme dans un gaz, sous forme d'onde progressive 1D en présence de N réactions irréversibles exothermiques entre m espèces chimiques A_j : $\sum_{j=1}^{m}\alpha_{i,j}A_j \to \sum_{j=1}^{m}\beta_{i,j}A_j$, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$. Notons Γ la matrice des coefficients $\gamma_{i,j} = \beta_{i,j} - \alpha_{i,j}$ où i est l'indice des lignes et j

celui des colonnes. Le modèle thermo-diffusif pour le système de réaction-diffusion correspondant à une onde progressive 1D de vitesse c est alors [10] :

$$\kappa T'' + cT' + \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i(A, T) = 0, \tag{1}$$

$$dA'' + cA' + \Gamma\phi(A, T) = 0, \tag{2}$$

où T est la température du gaz, $A = (A_1, \ldots, A_m)^t$ le vecteur des concentrations des espèces A_j, $q = (q_1, \ldots, q_N)^t > 0$ le vecteur des chaleurs de réactions, κ le coefficient de diffusion thermique, d le coefficient de diffusion massique supposé être le même pour toutes les espèces. Les limites des variables A et T sont $A^{\pm}$ et $T^{\pm}$ en $\pm\infty$, avec $T^- > T^+$. Enfin, le vecteur $\phi(A, T)$ a ses composantes de la forme : $\phi_i(A, T) = k_i(T) g_i(A) \prod_{j=1}^{m} A_j^{\nu_{i,j}}$ où $g_i(A) > 0$ si $A \geqslant 0$ et où $\nu_{i,j} \geqslant 1$ si $\alpha_{i,j} \neq 0$ et $\nu_{i,j} = 0$ si $\alpha_{i,j} = 0$.

L'existence de solution c, T et A de ce type de système a fait l'objet de plusieurs études. Elle a, par exemple, été montrée dans [1] pour une chimie simple et dans [10] pour un système de réactions irréversibles, formant un graphe ouvert, c'est à dire tel qu'il existe un vecteur ligne $\sigma \in \mathbb{R}^m$ tel que $\sigma\Gamma < 0$. Dans [3] l'existence d'onde est montrée pour une chimie complexe formée de réactions réversibles et avec un transport détaillé. Dans [1] et [3], c'est le degré topologique de Leray–Schauder qui est utilisé pour montrer l'existence d'onde sur des intervalles bornés, avec ensuite, une extension à la droite réelle tout entière. Dans [10], le degré topologique est défini et utilisé directement pour l'espace non borné $\mathbb{R}$. D'autre part, une estimation de la vitesse de l'onde dans l'asymptotique des grandes énergies d'activation est donnée dans [8] et [11]. Cependant, on constate que cette estimation tend vers l'infini lorsque le nombre de Lewis, rapport du coefficient de diffusion thermique sur le coefficient de diffusion massique, tend vers l'infini. Mais, dans le cas d'une chimie simple, il est montré dans [6], en utilisant le degré de Leray Schauder, que la vitesse de l'onde admet une limite finie quand le nombre de Lewis tend vers l'infini.

Dans cette Note, on s'intéresse à une chimie complexe du même type que dans [10], avec une matrice Γ de rang N, c'est à dire que l'on suppose que les réactions sont linéairement indépendantes. Ce type de système peut être ramené [10] à un système sur des variables monotones u_i par le changement de variables : $A = \Gamma u + A^+$. On redémontre ici les résultats d'existence d'onde progressive, en utilisant une méthode plus directe que dans [10], basée sur une modification des équations et utilisant un degré topologique défini pour des ouverts non bornés. Puis, on s'intéresse, au comportement des ondes progressives quand le nombre de Lewis tend vers l'infini, généralisant ainsi une partie des résultats de [6].

Par soucis de clareté, et puisque la difficulté principale de ce type de système est l'éventuelle non linéarité du terme source en les concentrations (après avoir fait le changement de variables $A = \Gamma u + A^+$), on détaille les résultats pour un système plus simple, correspondant à une seule réaction d'ordre n. Cependant, les résultats sont valables pour le système décrit ci-dessus. On étudie donc le système suivant :

$$(\mathcal{S}_d) \quad \begin{cases} \kappa\theta'' + c\theta' + \tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n = 0, \\ d\alpha'' + c\alpha' + \tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \theta(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où θ est la température réduite du gaz (elle vaut 0 pour les gaz frais et 1 pour les gaz brûlés) et α la fraction massique du produit de la réaction. Ici, le nombre de Lewis $\mathrm{Le} = \kappa/d$ est supposé supérieur à 1. Notons $(\mathcal{S}_0)$ ce même système mais sans diffusion : $d = 0$.

La fonction $\tilde{k}$ est régulière et proche du coefficient d'Arrhenius : afin d'éviter le problème de la frontière froide [11] on a introduit une température d'allumage $\theta_c > 0$ (dans [7] et [2], cette température est la température des gaz frais $\theta_c = 0$, mais ce n'est pas l'objet de cette Note) et $\tilde{k}(\theta)$ s'annule pour $\theta \leqslant \theta_c$.

La démonstration du résultat d'existence d'onde est réalisée en utilisant le degré topologique pour des opérateurs elliptiques, de Fredholm et propres, dans des domaines non bornés. Ce degré est défini dans [9] pour le cas plus général des cylindres non bornés et pour des espaces de Hölder à poids où le poids est polynômial (pour des espaces de Sobolev à poids, le degré est défini dans [10]). Ici, ces espaces sont : $E_1 = C^{2+\delta}_{\mu}(\mathbb{R})$ et $E_2 = C^{\delta}_{\mu}(\mathbb{R})$, avec $\mu(x) = 1 + x^2$. Dans [9], la construction du degré est appliquée à des opérateurs généraux de réaction-diffusion du type $Aw = aw'' + c(w)w' + F(w)$, où a est une matrice constante, diagonale avec des termes strictement positifs sur la diagonale et où F s'annule en w^+ et w^- avec $w^+ \neq w^-$. La fonction w est telle que $w - (1 - \Phi)w^+ - \Phi w^- \in E_1$, où Φ est une fonction C^∞ valant 1 sur $]-\infty, 0]$ et 0 sur $[1, +\infty[$. La fonctionnelle $c(w)$ introduite à la place de la vitesse de l'onde est définie par :

$$c(w) = \ln \int_{\mathbb{R}} \left| w(x) - w^+ \right|^2 \sigma(x)\, \mathrm{d}x, \tag{4}$$

où σ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ et telle que $\int_{-\infty}^{0} \sigma(x)\, \mathrm{d}x < \infty$. Cette fonctionnelle est telle que, si on note $w_h(x) = w(x + h)$, alors $c(w_h)$ en tant que fonction de h est une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi telle que, pour toute solution w de $Aw = 0$, on a : $\langle c'(w), w' \rangle \neq 0$. Elle permet ainsi de résoudre les problèmes liés à l'invariance par translation et le problème de valeur propre nulle [9]. Alors, si la condition

$$\forall \lambda \geqslant 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \det\bigl(-a\xi^2 + c(w)\, \mathrm{i}\xi + F'(w^\pm) - \lambda I\bigr) \neq 0 \tag{5}$$

est réalisée, on peut définir le degré topologique pour l'opérateur A. Cependant, on ne peut pas appliquer directement ces résultats pour notre problème $(\mathcal{S}_d)$: la condition (5) n'est pas vérifiée, ni en $+\infty$, ni en $-\infty$. Afin de vérifier la condition en $-\infty$, on introduit un petit paramètre ε et le système secondaire :

$$(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}}) \quad \begin{cases} \kappa\theta'' + c\theta' + (1-\varepsilon)\tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n + \varepsilon\tilde{k}(\theta)(1-\alpha) + \varepsilon^2\tilde{k}(\theta)(\alpha - \theta) = 0, \\ d\alpha'' + c\alpha' + (1-\varepsilon)\tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n + \varepsilon\tilde{k}(\theta)(1-\alpha) = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \theta(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

On verra qu'un changement de variables permet de vérifier la condition en $+\infty$ et ainsi, de pouvoir définir le degré topologique pour l'opérateur correspondant. Dans [10], des termes petits sont également ajoutés aux équations, mais leurs formes ne sont pas explicitement reliées aux variables, et les homotopies sont alors plus complexes.

Dans la Section 2, on donne des estimations a priori nécessaires pour montrer l'existence de solution de $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ ainsi que pour les passages à la limite. L'existence de solution de $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ est alors montrée, dans la Section 3, en se ramènant, par une homotopie, à un système avec une seule équation. Enfin, dans la Section 4, on réalise les deux passages à la limite : un sur ε pour retrouver $(\mathcal{S}_d)$ et un deuxième quand d tend vers 0.

2. Estimations a priori

On donne ici des estimations a priori valables pour $\varepsilon \geqslant 0$ assez petit et $d \leqslant \kappa$. Celles-ci sont suffisamment générales pour servir à la fois pour montrer l'existence de solution du système secondaire dans la Section 3 et pour réaliser les passages à la limite qui permettent de passer du système secondaire au système initial avec diffusion puis du système avec diffusion au système sans diffusion (Section 4).

Commençons par remarquer qu'une onde solution du système $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ est nécessairement de profil monotone et de vitesse positive.

PROPOSITION 2.1. – *Si, pour $0 < d \leqslant \kappa$ et $\varepsilon \geqslant 0$, il existe un scalaire c et des solutions θ et α dans $C^{2+\delta}(\mathbb{R})$ de $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ alors c est strictement positif et les fonctions θ et α sont strictement décroissantes.*

Donnons alors des estimations, indépendantes de d et ε, des solutions du problème $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$.

THÉORÈME 2.2. – *Il existe des constantes $M > 0$, $c^- > 0$ et c^+ telles que pour chaque $d \in]0, \kappa]$ et pour chaque $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \tilde{k}(y)(1-y)^n\, \mathrm{d}y / \bigl(n\int_0^1 \tilde{k}(y)\, \mathrm{d}y + \int_0^1 \tilde{k}(y)(1-y)^n\, \mathrm{d}y\bigr) \in]0, 1[$, s'il existe* *un scalaire c et des solutions θ et α dans $\mathrm{C}^{2+\delta}(\mathbb{R})$ de $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$, alors on a :* $\|\theta\|_{\mathrm{C}^{2+\delta}(\mathbb{R})} \leqslant M$*,* $\|\alpha\|_{\mathrm{C}^{2+\delta}(\mathbb{R})} \leqslant M$*,* $c^- \leqslant c \leqslant c^+$ *et aussi* $\theta > (1-\varepsilon)\alpha$*.*

Les démonstrations de ces résultats seront détaillées dans [4].

3. Existence de solution du système $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$

Pour montrer l'existence de solution du système $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$, on réalise une homotopie entre l'opérateur correspondant et un opérateur « plus simple » dont on peut calculer le degré.

Notons E l'espace des fonctions u telles que $u - \Phi \in E_1$ où Φ a été définie dans l'introduction. Considérons l'opérateur suivant, dépendant du paramètre $\tau \in [0,1]$, défini pour $\theta, \alpha \in E$ par :

$$A_\tau \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa\theta'' + \tilde{c}(\theta,\alpha)\theta' + (1-\varepsilon)\tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n + \varepsilon\tilde{k}(\theta)(1-\alpha) + \varepsilon^2\tilde{k}(\theta)(\alpha-\theta) \\ d_\tau\alpha'' + \tilde{c}(\theta,\alpha)\alpha' + (1-\varepsilon)\tilde{k}(\theta)(1-\alpha)^n + \varepsilon\tilde{k}(\theta)(1-\alpha) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

avec $d_\tau = d(1-\tau) + \kappa\tau$ et $\tau \in [0,1]$. Grâce aux estimations précédentes, on peut introduire un changement de variable qui permet de vérifier la condition (5) en $+\infty$. Posons λ un réel tel que $0 < \lambda < c^-/\kappa$, où $c^- > 0$ est le minorant de la vitesse obtenu dans le Théorème 2.2. On note alors ζ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\zeta(x) = \exp(\lambda[1-\Phi(x)]x)$ et on fait le changement de variables suivant : $t = \zeta\theta$, $a = \zeta\alpha$. Les fonctions t et a d'un côté et θ et α de l'autre, sont identiques sur $]-\infty, 0]$. De plus, si $A_\tau(\theta,\alpha) = 0$ et si on note $x_c = \theta^{-1}(\theta_c)$, alors, pour $x \geqslant 1$ et $x \geqslant x_c$, on a : $t(x) = \theta_c\,\mathrm{e}^{cx_c/\kappa}\,\mathrm{e}^{(\lambda - c/\kappa)x}$ et $a(x) = \alpha(x_c)\,\mathrm{e}^{cx_c/d}\,\mathrm{e}^{(\lambda - c/d)x}$. On montre alors facilement que les systèmes avant et après changement de variable sont équivalents, si dans les deux cas, on cherche les solutions dans l'espace E. On note $\tilde{A}_\tau$ l'opérateur obtenu après changement de variable : $\tilde{A}_\tau(t,a) = \zeta A_\tau(t/\zeta, a/\zeta)$. La fonctionnelle $\tilde{c}$ est alors donnée par $\tilde{c}(\theta,\alpha) = c(t,a)$, où c est définie par (4), avec $w^+ = (0,0)$.

Cependant, pour retrouver des estimations a priori dans les espaces de Hölder, indépendantes de τ, on a besoin d'une majoration de x_c, qui provient essentiellement de la forme de la fonctionnelle choisie. On peut se ramener, par translation sur la fonction σ de (4), à $2\int_{-\infty}^0 \sigma(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$. On a alors :

LEMME 3.1. – *Pour toute solution $(\theta,\alpha) \in E^2$ de $A_\tau(\theta,\alpha) = 0$, le réel $x_c = \theta^{-1}(\theta_c)$ est borné indépendemment de τ.*

Il est facile de vérifier que l'opérateur $\tilde{A}_\tau$ satisfait la condition (5). Montrons alors que ses zéros sont nécessairement contenus dans une boule de l'espace E :

THÉORÈME 3.2. – *Soit $d \in]0,\kappa]$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$. Il existe une constante $R > 0$ telle que, pour chaque $\tau \in [0,1]$, s'il existe des solutions t_τ et a_τ dans E de $\tilde{A}_\tau(t_\tau, a_\tau) = 0$, alors on a :* $\|\Phi - t_\tau\|_{\mathrm{C}_\mu^{2+\delta}(\mathbb{R})} < R$ *et* $\|\Phi - a_\tau\|_{\mathrm{C}_\mu^{2+\delta}(\mathbb{R})} < R$*.*

Les estimations dans les espaces de Hölder sont obtenues grâce au Théorème 2.2 et au Lemme 3.1. Les estimations dans l'espace à poids sont possibles car on ne peut pas tendre vers un point critique « intermédiaire ». En effet, $x_c = \theta_\tau^{-1}(\theta_c)$ est borné indépendamment de τ et les points critiques du type $\theta = cste \leqslant \theta_c$ sont localisés sur $[x_c, +\infty[$, où les fonctions θ et α sont chacune comprises entre deux exponentielles décroissantes, et le seul autre point critique est $\theta = \alpha = 1$.

Ainsi, si on note $\mathcal{B} \subset E^2$ la boule ouverte centrée en Φ et de rayon R, où R est la constante du Théorème 3.2, alors $\tilde{A}_\tau$ ne s'annule jamais sur le bord de $\mathcal{B}$ et les opérateurs $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_1$ ont le même degré topologique [9]. On a alors le théorème d'existence pour le système secondaire :

THÉORÈME 3.3. – *Pour chaque $d \in]0,\kappa]$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, il existe un scalaire c et des fonctions θ et α dans E solution du système $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$.*

Démonstration. – En effet, on montre que le système $A_1(\theta,\alpha) = 0$ avec θ et α dans E se réduit à : $\theta = \alpha \in E$ solution de : $\kappa\theta'' + c(\theta)\theta' + \tilde{k}(\theta)[(1-\varepsilon)(1-\theta)^n + \varepsilon(1-\theta)] = 0$. Ce problème admet une unique solution. Ainsi, $\tilde{A}_1$ s'annule en un unique point (t, a). De plus, grâce à la fonctionnalisation de c, l'opérateur $A_1'(t, a)$ n'admet pas de valeur propre nulle. On sait alors [9], que son degré topologique par rapport à $\mathcal{B}$, qui contient (t, a), est 1 ou -1. En particulier, il n'est pas nul et donc, le degré de $\tilde{A}_0$ par rapport à $\mathcal{B}$ non plus. Par conséquent, il existe une solution $u \in B$ de $\tilde{A}_0 u = 0$. $\square$

4. Passages à la limite

Dans la section précédente, on a vu que le système secondaire $(\mathcal{S}_{\mathrm{sec}})$ admet une solution pour chaque $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Grâce à ce résultat et aux estimations de la Section 2, on peut maintenant montrer l'existence de solution de notre problème initial $(\mathcal{S}_d)$ en faisant tendre ε vers 0. On fait ensuite le lien avec le système sans diffusion en faisant tendre d vers zéro :

THÉORÈME 4.1. – *Pour chaque $d \in]0, \kappa]$, il existe un scalaire c_d et des fonctions α_d et θ_d dans $\mathrm{C}^{2+\delta}(\mathbb{R})$ solutions du problème $(\mathcal{S}_d)$. De plus, on a $\theta_d \geqslant \alpha_d$.*

Il existe un scalaire c et des fonctions α et θ dans $\mathrm{C}^{2+\delta}(\mathbb{R})$ solutions du problème sans diffusion $(\mathcal{S}_0)$. De plus, il existe une suite (d_n) qui converge vers 0, telle que (c_{d_n}) converge vers c, (θ_{d_n}) et (α_{d_n}) convergent en norme C^2 sur tout borné vers θ et α. Enfin, on a $\theta \geqslant \alpha$.

Démonstration. – Détaillons seulement le deuxième passage à la limite (le premier se fait de la même manière). Grâce aux estimations (valable aussi pour $\varepsilon = 0$) et par un théorème classique d'analyse fonctionnelle, on a directement la convergence, en norme C^2 sur tout borné, de sous-suites (θ_{d_n}) et (α_{d_n}) vers des fonctions θ et α de $\mathrm{C}^{2+\delta}(\mathbb{R})$. Sans perte de généralité, on suppose que la suite bornée (c_{d_n}) converge vers un réel c. Le passage à la limite des inégalitées indique que $0 < c^- \leqslant c \leqslant c^+$, que θ et α sont décroissante et comprises entre 0 et 1 et que $\theta \geqslant \alpha$. On retrouve alors les limites de θ et α en $\pm\infty$. $\square$

On peut remarquer que, si on a un résultat d'unicité pour le problème $(\mathcal{S}_0)$, comme dans le cas $n = 1$, alors on a la convergence de c_d, θ_d et α_d vers c, θ et α quand d tend vers 0. On a donc généralisé le résultat de passage à la limite de la vitesse de l'onde quand Le tend vers l'infini de [6] à une chimie d'ordre n et, de manière immédiate, à une chimie complexe de réactions irreversibles exothermiques formant un graphe ouvert, grâce à un changement de variable [10]. D'autre part, ce type de méthode peut aussi être utilisé pour montrer l'existence d'ondes planes 1D dans des configurations où le réactant est présent sous forme d'une phase liquide dispersée : un brouillard de gouttes polydispersé [5].

Références bibliographiques

[1] H. Berestycki, B. Nicolaenko, B. Scheurer, Traveling wave solutions to reaction-diffusion systems modeling combustion, Nonlinear Partial Differential Equations (1982) 189–208.

[2] A. Bonnet, Propagation of flames in the limit of zero ignition temperature, Arch. Rational Mech. Anal. 138 (3) (1997) 205–238.

[3] V. Giovangigli, Plane laminar flames with multicomponent transport and complex chemistry, Math. Models Methods Appl. Sci. 9 (3) (1999) 337–378.

[4] F. Laurent, M. Massot, V. Volpert, Propagation of gaseous flames in the limit of small diffusion coefficients, 2002, en préparation.

[5] F. Laurent, M. Massot, Propagation of plane polydispersed spray flames, Prépublication MAPLY, UMR 5585 Lyon, 2002, http://maply.univ-lyon1.fr/publis/publiv/2002/publis.html.

[6] E. Logak, V. Loubeau, Travelling wave solutions to a condensed phase combustion model, Asymptotic. Anal. 12 (4) (1996) 259–294.

[7] M. Marion, Mathematical study of a model with no ignition temperature for laminar plane flames, Lectures in Appl. Math. 24 (1985) 239–252.

[8] B.V. Novozhilov, The rate of propagation of the front of an exothermic reaction in a condensed phase, Dokl. Phys. Chem. 141 (1961) 836–838.

[9] V.A. Volpert, A.I. Volpert, J.F. Collet, Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders, Adv. Differential Equations 4 (1999) 777–812.

[10] A.I. Volpert, V.A. Volpert, V.A. Volpert, Travelling Wave Solutions of Parabolic Systems, Transl. Math. Monographs, Vol. 140, American Mathematical Society, 1994.

[11] Ya.B. Zel'dovich, G.I. Barenblatt, V.B. Librovich, G.M. Makhviladze, Mathematical Theory of Combustion and Explosions, Plenum Press, New York, 1985 (English translation).