

# Une caractérisation des fonctions holomorphes injectives en analyse ultramétrique

Juan Rivera-Letelier <sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Matemática, Universidad Católica del Norte, Casilla 1280, Antofagasta, Chile

<sup>b</sup> Institute for Mathematical Sciences, SUNY, Stony Brook, NY 11794-3651, USA

Reçu le 5 juillet 2002 ; accepté le 9 juillet 2002

Note présentée par Jean Christophe Yoccoz.

---

## Résumé

On montre qu'une fonction holomorphe non-constante  $f$  définie sur un sous-espace analytique de  $\mathbb{C}_p$  est injective si et seulement si on a

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|^2 = |f'(x) \cdot f'(y)|, \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ distincts.}$$

Cette caractérisation démontre l'analogue, pour les fonctions holomorphes, d'une conjecture de A. Escassut et M.C. Sarmant. D'autre part on donne un contre-exemple à cette conjecture, qui concerne les éléments bi-analytiques. *Pour citer cet article : J. Rivera-Letelier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 441–446.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## A characterization of injective holomorphic functions in ultrametric analysis

## Abstract

We prove that a non constant holomorphic function  $f$  defined over an analytic subspace of  $\mathbb{C}_p$  is injective if and only if

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|^2 = |f'(x) \cdot f'(y)|, \quad \text{for every distinct } x \text{ and } y.$$

This characterization proves the analogue, for holomorphic functions, of a conjecture of A. Escassut and M.C. Sarmant. On the other hand we give a counter-example to this conjecture, that concerns bi-analytic elements. *To cite this article : J. Rivera-Letelier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 441–446.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

Fix a prime number  $p$  and let  $\mathbb{Q}_p$  be the field of  $p$ -adic numbers and let  $\mathbb{C}_p$  be the least extension of  $\mathbb{Q}_p$ , which is algebraically closed and complete. We denote by  $\mathbb{C}_p^*$  the multiplicative group of non-zero elements of  $\mathbb{C}_p$  and  $|\mathbb{C}_p^*| = \{|z| \mid z \in \mathbb{C}_p^*\}$ , where  $|\cdot|$  is the norm of  $\mathbb{C}_p$ .

---

Adresse e-mail : rivera@math.sunysb.edu (J. Rivera-Letelier).

A closed or open ball of  $\mathbb{C}_p$  is a set of the form

$$\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| \leq r\} \quad \text{or} \quad \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| < r\}, \text{ respectively,}$$

where  $a \in \widehat{\mathbb{C}_p}$  and  $r \in |\mathbb{C}_p^*|$ . A (closed) affinoid is a set of the form  $B - (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ , where  $B$  is a closed ball and the balls  $B_1, \dots, B_n$  are open. An analytic space is an increasing union of affinoids.

An holomorphic function defined on an affinoid is a uniform limit of rational maps without poles in the affinoid. An holomorphic function is a function defined on an analytic space  $X \subset \mathbb{C}_p$ , whose restriction to any affinoid contained in  $X$  is holomorphic, see e.g. [3] or [9].

**THEOREM 1.** – Let  $X \subset \mathbb{C}_p$  be an analytic space and let  $f$  be a non-constant analytic function. Then  $f$  is injective if and only if

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|^2 = |f'(x) \cdot f'(y)|, \quad \text{for every distinct } x, y \in X. \tag{1}$$

For  $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p$  distinct we call  $R(a, b; c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{C}_p^*$  the cross ratio of  $(a, b, c, d)$ . The following corollary is an easy consequence of Theorem 1.

**COROLLARY 1.** – Let  $f$  be a holomorphic and injective function defined on an analytic space  $X \subset \mathbb{C}_p$ . Then for every distinct  $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p$  the cross ratio  $R(f(a), f(b); f(c), f(d))$  is well defined and we have

$$|R(a, b; c, d)| = |R(f(a), f(b); f(c), f(d))|.$$

It is easy to see that the only functions that preserve the cross ratio are restrictions of homographies. So we may interpret Theorem 1 as saying that those holomorphic functions that are injective are those which are “close” to homographies.

The proof that the property (1) implies that  $f$  is injective is simple and general. For the proof of the reverse implication, we consider the map  $f_* : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{H}_p$  induced by  $f$ , where  $\mathbb{H}_p$  is the  $p$ -adic hyperbolic space and  $\widehat{X}$  is the convex hull of  $X$  in  $\mathbb{H}_p$ ; see [6,9,7]. Then the property (1) follows easily from the fact that, when  $f$  is injective, the map  $f_*$  induces an isometry between  $\widehat{X}$  and  $f_*(\widehat{X})$ , see [6,9].

### 1. On analytic and bi-analytic elements

For general references to this section see e.g. [1].

Recall that an analytic element defined on a set  $D \subset \mathbb{C}_p$  is a uniform limit of rational maps without poles in  $D$ . An injective analytic element whose inverse is also an analytic element is called bi-analytic. Finally recall that a set  $D \subset \mathbb{C}_p$  is called infraconnected if for every  $a \in \mathbb{C}_p$  and  $r' > r > 0$  such that the annulus  $\{r < |z - a| < r'\}$  is disjoint from  $D$ , we have  $D \subset \{|z - a| \leq r\}$  or  $D \cap \{|z - a| < r'\} = \emptyset$ .

The equivalence of Theorem 1 does not hold in other contexts. In fact A. Escassut and M.C. Sarmant described an open infraconnected set  $D \subset \mathbb{C}_p$  where the polynomial  $P_0(z) = z^2$  is injective and such that the function  $P_0|_D$  does not satisfy property (1), see [2, p. 161]. Moreover they remarked that the analytic element  $P_0|_D$  is not bi-analytic.

Motivated by this example, A. Escassut and M.C. Sarmant conjectured that for an analytic element defined on an open infraconnected set, the property (1) is equivalent to the analytic element being bi-analytic, see Conjecture 3 of [2, p. 162].

In [8] we prove one part of this conjecture: a bi-analytic element defined on an open infraconnected set, satisfies property (2). We remark that the polynomial  $z + z^2 \in \mathbb{C}_p[z]$ , as an analytic element on  $\{|z| < 1\}$ , is a counter-example to the reverse implication, and hence to the mentioned conjecture.

We remark that the inverse of a holomorphic and injective function is also holomorphic, see [5] or [9]. So Theorem 1 implies the conjecture of A. Escassut and M.C. Sarmant, for holomorphic functions.

Fixons un nombre premier  $p$  et soient  $\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques et  $\mathbb{C}_p$  la plus petite extension algébriquement close et complète de  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $\mathbb{C}_p^*$  le groupe multiplicatif des éléments non-nuls de  $\mathbb{C}_p$  et on note  $|\mathbb{C}_p^*| = \{|z| \mid z \in \mathbb{C}_p^*\}$ , où  $|\cdot|$  est la norme de  $\mathbb{C}_p$ .

Une *boule fermée* (resp. *ouverte*) de  $\mathbb{C}_p$  est un ensemble de la forme

$$\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| \leq r\} \quad (\text{resp. } \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| < r\}),$$

où  $a \in \mathbb{C}_p$  et  $r \in |\mathbb{C}_p^*|$ . Un *affinoïde* (*fermé*) est un ensemble de la forme  $B - (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ , où  $B$  est une boule fermée et les boules  $B_1, \dots, B_n$  sont ouvertes. Un *espace analytique* est une réunion croissante d'affinoïdes.

Une *fonction holomorphe définie sur un affinoïde* est une limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôles dans l'affinoïde. Une *fonction holomorphe* est une fonction définie sur un espace analytique  $X \subset \mathbb{C}_p$ , telle que sa restriction à tout affinoïde contenu dans  $X$  est holomorphe, voir e.g. [3] ou [9].

**THÉORÈME 1.** – Soit  $X \subset \mathbb{C}_p$  un espace analytique et soit  $f$  une fonction holomorphe non-constante. Alors  $f$  est injective si et seulement si on a

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|^2 = |f'(x) \cdot f'(y)|, \quad \text{pour tous } x, y \in X \text{ distincts.} \quad (2)$$

Pour  $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p$  distincts on appelle  $R(a, b; c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{C}_p^*$  le *birapport* de  $(a, b, c, d)$ . La preuve du corollaire suivant est ci-dessous.

**COROLLAIRE 2.** – Soit  $f$  une fonction holomorphe et injective définie sur un espace analytique  $X \subset \mathbb{C}_p$ . Alors pour tous  $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p$  distincts, le birapport  $R(f(a), f(b); f(c), f(d))$  est bien défini et on a

$$|R(a, b; c, d)| = |R(f(a), f(b); f(c), f(d))|.$$

Il est facile de voir que toute fonction qui préserve le birapport coïncide avec une homographie. Donc on peut interpréter le Théorème 1 en disant que les fonctions holomorphes qui sont injectives sont celles qui sont « proches » des homographies.

La démonstration que la propriété (2) implique que  $f$  est injective est simple et assez générale. Pour montrer l'implication inverse, on considère l'application  $f_*: \widehat{X} \rightarrow \mathbb{H}_p$  induite par  $f$ , où  $\mathbb{H}_p$  est l'espace hyperbolique  $p$ -adique et  $\widehat{X}$  est l'enveloppe convexe de  $X$  dans  $\mathbb{H}_p$ ; voir [6,9,7]. La propriété (2) suit facilement du fait que, quand  $f$  est injective, l'application  $f_*$  induit une isométrie entre  $\widehat{X}$  et  $f_*(\widehat{X})$ , voir [6,9].

*Preuve du Corollaire 2.* – Comme  $f$  est injective, les points  $f(a), f(b), f(c), f(d) \in \mathbb{C}_p$  sont distincts et donc le birapport  $R(f(a), f(b); f(c), f(d))$  est bien défini. Si l'on applique la propriété (2) aux paires  $(a, c), (b, d), (a, d)$  et  $(b, c)$  on obtient

$$\frac{|R(f(a), f(b); f(c), f(d))|^2}{|R(a, b; c, d)|^2} = \frac{|f'(a) \cdot f'(c)| \cdot |f'(b) \cdot f'(d)|}{|f'(a) \cdot f'(d)| \cdot |f'(b) \cdot f'(c)|} = 1. \quad \square$$

## 2. Sur les éléments analytiques et bi-analytiques

Pour des références générales à cette section on renvoie le lecteur à [1].

Rappelons qu'un *élément analytique* défini sur une partie  $D \subset \mathbb{C}_p$ , est une limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôles dans  $D$ . Un élément analytique injectif dont l'inverse est aussi un élément analytique, est appelé *bi-analytique*. Rappelons finalement qu'une partie  $D \subset \mathbb{C}_p$  est *infraconnexe* si pour tous  $a \in \mathbb{C}_p$  et  $r' > r > 0$  tels que la couronne  $\{r < |z - a| < r'\}$  soit disjointe de  $D$ , on a  $D \subset \{|z - a| \leq r\}$  ou  $D \cap \{|z - a| < r'\} = \emptyset$ .

L'équivalence du Théorème 1 n'est pas valable dans d'autres contextes. En effet A. Escassut et M.C. Sarmant ont décrit un ouvert infraconnexe  $D \subset \mathbb{C}_p$  où le polynôme  $P_0(z) = z^2$  est injectif et tel que la fonction  $P_0|_D$  ne satisfait pas la propriété (2), voir [2, p. 161]. De plus, ils ont remarqué que l'élément analytique  $P_0|_D$  n'est pas bi-analytique.

Motivés par cet exemple, A. Escassut et M.C. Sarmant ont conjecturé que *pour un élément analytique défini sur un ouvert infraconnexe, la propriété (2) est équivalente à ce que l'élément analytique soit bi-analytique*, voir Conjecture 3 de [2, p. 162].

Dans [8] on montre une partie de cette conjecture : tout élément bi-analytique défini sur un ouvert infraconnexe satisfait la propriété (2). D'autre part l'Exemple 1 ci-dessous est un contre-exemple à l'implication inverse.

On remarque que l'inverse d'une fonction holomorphe et injective est aussi une fonction holomorphe, voir e.g. [9] ou [5]. Donc le Théorème 1 implique la conjecture de A. Escassut et M.C. Sarmant, pour les fonctions holomorphes.

*Exemple 1.* – Considérons le polynôme  $P(z) = z + z^2 \in \mathbb{C}_p[z]$ . La boule unité ouverte  $B = \{|z| < 1\}$  est fixée par  $P$  et la restriction de  $P$  à  $B$  préserve la distance induite par la norme  $|\cdot|$ . En particulier  $P|_B$  satisfait la propriété (2).

Clairement  $P|_B$  est un élément analytique. On montrera que  $P|_B$  n'est pas bi-analytique. On utilisera la notion de *bonne réduction* (introduite dans [4]) et la notion de *réduction non-triviale*; voir [7, Section 5.1].

Supposons par contradiction que l'inverse  $g : B \rightarrow B$  de  $P|_B$  est un élément analytique. Il existe alors une fonction rationnelle  $R \in \mathbb{C}_p(z)$  sans pôles dans  $B$  et telle que

$$\sup\{|R(z) - g(z)| \mid z \in B\} < 1. \tag{3}$$

Comme  $g(B) = B$  on a aussi  $R(B) = B$  et donc  $R$  a une réduction non-triviale  $\tilde{R} \in \tilde{\mathbb{C}}_p(z)$ , où  $\tilde{\mathbb{C}}_p$  désigne le corps résiduel de  $\mathbb{C}_p$ .

D'autre part, le polynôme  $P$  a une bonne réduction, égale à  $\tilde{P}(z) = z + z^2 \in \tilde{\mathbb{C}}_p[z]$ . Donc  $\deg(\tilde{R} \circ \tilde{P}) > 1$  et par conséquent la fonction rationnelle  $R \circ P(z) - z \in \mathbb{C}_p(z)$  a une réduction non-triviale, égale à  $\tilde{R} \circ \tilde{P}(z) - z \in \tilde{\mathbb{C}}_p(z)$ . En particulier

$$\sup\{|R \circ P(z) - z| \mid z \in B\} = 1.$$

On obtient une contradiction avec (3).

### 3. Une réduction

Maintenant on réduit le Théorème 1 à la proposition suivante.

Notons que toute fonction qui préserve la distance induite par la norme  $|\cdot|$ , satisfait la propriété (2).

**PROPOSITION 3.** – *Soit  $Y \subset \mathbb{C}_p$  un affinoïde et soit  $f$  une fonction holomorphe définie sur  $Y$ . Si  $f$  est injective, alors il existe une homographie  $\varphi$  telle que  $\varphi \circ f(Y) \subset \mathbb{C}_p$  et telle que  $\varphi \circ f$  préserve la distance induite par la norme  $|\cdot|$ .*

*Preuve du Théorème 1.* – Soit  $f$  une fonction holomorphe non-constante définie sur  $X$  et satisfaisant la propriété (2). Notons que si pour un certain  $x \in X$  on a  $f'(x) = 0$ , alors la propriété (2) implique que  $f$

est constante égale à  $f(x)$ . On conclut que  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in X$ . Par conséquent si  $x, y \in X$  sont distincts, on a

$$|f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2 |f'(x) \cdot f'(y)| \neq 0,$$

et donc  $f(x) \neq f(y)$ .

Supposons d'autre part que  $f$  est une fonction holomorphe et injective, définie sur  $X$ . Etant donné  $x, y \in X$  distincts, soit  $Y \subset X$  un affinoïde contenant  $x$  et  $y$ . Par la Proposition 3, il existe une homographie  $\varphi$  telle que  $\varphi \circ f(Y) \subset \mathbb{C}_p$  et telle que  $\varphi \circ f|_Y$  préserve la distance induite par la norme  $|\cdot|$ .

En particulier la fonction  $\varphi \circ f|_Y$  satisfait la propriété (2). Comme  $\varphi$  est une homographie, ceci implique que la fonction  $f$  satisfait aussi la propriété (2) pour  $x, y \in X$ .  $\square$

#### 4. Espace hyperbolique $p$ -adique

Pour des références à cette section on renvoie le lecteur à [9] ou [7].

Considérons la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}$  définie par

$$(w, t) \sim (w', t') \quad \text{si et seulement si} \quad t = t' \text{ et } p^t \geq |w - w'|.$$

On considère la distance  $d$  sur  $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}$  induite par la distance usuelle de  $\mathbb{R}$  : la distance entre les points représentés par  $(w, t)$  et  $(w', t')$  est donnée par  $|t - t'|$  si  $|w - w'| \leq p^{\max\{t, t'\}}$  et en général par

$$2 \max\{t, t', \log_p |w - w'|\} - t - t'.$$

L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_p$  est par définition l'espace métrique  $(\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}/\sim, d)$  (voir Appendice 2 de [7], où on a considéré la complétion de cet espace métrique). Les *points rationnels* de  $\mathbb{H}_p$  sont par définition les points représentés par  $(w, t)$ , avec  $t$  rationnel.

Le groupe des homographies agit par isométries sur  $\mathbb{H}_p$  ; pour une homographie  $\varphi$ , on note  $\varphi_*$  l'action sur  $\mathbb{H}_p$  correspondante. Cette action est déterminée, au niveau de  $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}$ , par les définitions suivantes :

- Si  $T(w) = w + \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{C}_p$ , alors  $T_*((w, t)) = (w + \tau, t)$ .
- Si  $M(w) = \lambda w$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$ , alors  $M_*((w, t)) = (\lambda w, t + \log_p |\lambda|)$ .
- Si  $I(w) = 1/w$ , alors  $I_*((w, t)) = (0, -t)$  quand  $|w| \leq p^t$  et  $I_*((w, t)) = (1/w, t - 2 \log_p |w|)$  quand  $|w| \geq p^t$ .

Notons que cette action du groupe des homographies est transitive sur les points rationnels de  $\mathbb{H}_p$ .

Etant donné  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $\mathcal{S}_t$  le point de  $\mathbb{H}_p$  représenté par  $(0, t)$ . On note  $(0, \mathcal{S}_t) = \{\mathcal{S}_{t'} \mid t' < t\}$  et  $(0, \mathcal{S}_t] = \{\mathcal{S}_{t'} \mid t' \leq t\}$ , et pour  $t_0 < t_1$  on note  $[\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}] = \{\mathcal{S}_t \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ .

Etant donné  $z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$  et  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$  on peut trouver  $t \in \mathbb{R}$  et une homographie  $\varphi$ , tel que  $\varphi(z) = 0$  et  $\varphi_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_t$ . Alors on définit  $(z, \mathcal{S}) = \varphi_*^{-1}((0, \mathcal{S}_t))$  et  $(z, \mathcal{S}] = \varphi_*^{-1}((0, \mathcal{S}_t])$ , qui ne dépendent pas du choix de  $\varphi$ . On appelle  $(z, \mathcal{S})$  et  $(z, \mathcal{S}]$  des *demi-géodésiques*. Pour  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$  on définit  $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1]$  de façon analogue.

#### 5. Preuve de la Proposition 3

Soit  $Y = B - (B_1 \cup \dots \cup B_n)$  un affinoïde. Considérons  $a \in B$  et posons  $r = \text{diam}(B) \in |\mathbb{C}_p^*|$ . On note  $\mathcal{S}$  le point (rationnel) de  $\mathbb{H}_p$  représenté par  $(a, \log_p r) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{R}$ . On appelle  $\widehat{Y} = \bigcup_{z \in Y} (z, \mathcal{S}]$  l'*enveloppe convexe* de  $Y$  ; voir [7, Section 3.3].

Toute fonction holomorphe  $f$  définie sur  $Y$  induit une application  $f_* : \widehat{Y} \rightarrow \mathbb{H}_p$ , voir [9]. De plus, si  $f$  est injective, alors  $f_*$  induit une isométrie entre  $\widehat{Y}$  et  $f_*(\widehat{Y})$ .

La Proposition 3 est une conséquence immédiate de la proposition suivante.

PROPOSITION 4. – On garde les notations précédentes. Alors on a les propriétés suivantes.

- (1) Il existe une homographie  $\varphi$  telle que  $(\varphi \circ f)(Y) \subset B$  et  $(\varphi \circ f)_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ .
- (2) Si  $f(Y) \subset B$  et  $f_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ , alors  $f$  préserve la distance induite par la norme  $|\cdot|$ .

*Démonstration.* – 1.– Après un changement de coordonnée affine au départ on suppose  $B = \{|z| \leq 1\}$ . Comme le groupe des homographies agit de façon transitive sur les points rationnels de  $\mathbb{H}_p$ , on peut trouver une homographie  $\varphi$  telle que  $(\varphi \circ f)_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ .

Soit  $\mathcal{O}_p = B = \{|z| \leq 1\}$  l’anneau des entiers de  $\mathbb{C}_p$  et soit  $\mathfrak{m}_p = \{|z| < 1\}$  son idéal maximal. On étend la projection de  $\mathcal{O}_p$  à  $\tilde{\mathbb{C}}_p = \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ , à une projection  $\pi$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$  à  $\mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)$ , par  $\pi^{-1}(\infty) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \mathcal{O}_p$ . Notons que deux points  $z, z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$  ont la même projection dans  $\mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)$  si et seulement si l’intersection  $(z, \mathcal{S}) \cap (z', \mathcal{S})$  est non-vide.

Comme  $(\varphi \circ f)_*$  induit une isométrie entre  $\hat{Y}$  et  $(\varphi \circ f)_*(\hat{Y})$ , pour tout  $z \in Y$  on a  $(\varphi \circ f)_*(\langle z, \mathcal{S} \rangle) = (\varphi \circ f(z), \mathcal{S})$ . Par conséquent  $\varphi \circ f$  induit une application de  $\pi(Y) \subset \mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)$  à  $\mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)$ . On sait que cette application est une restriction d’une fonction rationnelle  $\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{C}}_p(z)$ , voir [9]. De plus, comme  $f$  est injective sur  $Y$ , le degré de  $\tilde{f}$  est égale à 1. Donc on peut choisir  $\varphi$  de telle façon que  $\tilde{f}$  soit égale à l’identité. Comme  $Y \subset B = \mathcal{O}_p$ , dans ce cas on a  $\varphi \circ f(Y) \subset \mathcal{O}_p = B$ .

2.– Etant donné deux points  $x, y \in B$ , soit  $\langle x|y \rangle$  le point de  $\mathbb{H}_p$  déterminé par  $(x, \mathcal{S}) \cap (y, \mathcal{S}) = [\langle x|y \rangle, \mathcal{S}]$ . On a

$$|x - y| = \text{diam}(B) \cdot p^{-d(\langle x|y \rangle, \mathcal{S})}.$$

Comme  $f_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  et  $f_*$  induit une isométrie entre  $\hat{Y}$  et  $f_*(\hat{Y})$ , pour tout  $z \in Y$  l’image de la demi-géodésique  $\langle z, \mathcal{S} \rangle$  par  $f_*$  est la demi-géodésique  $(f(z), \mathcal{S})$ . Donc pour  $x, y \in Y$  distincts on a  $f_*(\langle x|y \rangle) = \langle f(x)|f(y) \rangle$  et par conséquent

$$d(\langle f(x)|f(y) \rangle, \mathcal{S}) = d(f_*(\langle x|y \rangle), f_*(\mathcal{S})) = d(\langle x|y \rangle, \mathcal{S}).$$

Comme  $f(x), f(y) \in B$  on obtient

$$|f(x) - f(y)| = \text{diam}(B) \cdot p^{-d(\langle f(x)|f(y) \rangle, \mathcal{S})} = \text{diam}(B) \cdot p^{-d(\langle x|y \rangle, \mathcal{S})} = |x - y|. \quad \square$$

**Remerciements.** Je remercie A. Escassut et J.C. Yoccoz pour des discussions reliées à ce travail. Mes remerciements vont aussi à M. Flexor qui a fait des corrections d’orthographe. Ce papier a été écrit pendant le « Research Trimester on Dynamical Systems » à Pisa.

### Références bibliographiques

- [1] A. Escassut, Analytic elements in  $p$ -adic analysis, World Scientific, 1995.
- [2] A. Escassut, M.C. Sarmant, Injectivity, Mittag-Leffler series and Motzkin products, Ann. Sci. Math. Québec 16 (1992) 155–173.
- [3] J. Fresnel, M. van der Put, Géométrie Analytique rigide et applications, PM 18, Birkhäuser, 1981.
- [4] P. Morton, J. Silverman, Periodic points, multiplicities, and dynamical units, J. Reine Agnew. Math. 461 (1995) 81–122.
- [5] E. Motzkin, L’arbre d’un quasi connexe : un invariant conforme  $p$ -adique, Groupe d’étude d’analyse ultramétrique, 9<sup>ème</sup> année 3, 1981/82, 18 p.
- [6] J. Rivera-Letelier, Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux, Thèse, Orsay, 2000.
- [7] J. Rivera-Letelier, Espace hyperbolique  $p$ -adique et dynamique des fonctions rationnelles, Stony Brook IMS preprint # 2001/12, à paraître dans Compositio Math.
- [8] J. Rivera-Letelier, Éléments bi-analytiques et isométries partielles de l’espace hyperbolique, Prépublication, 2002.
- [9] J.C. Yoccoz, Notes d’un cours au Collège de France, 2001/2002.