

# Le problème de Signorini dans la théorie des plaques minces de Kirchhoff–Love

Jean-Claude Paumier

Laboratoire de modélisation et calcul, UMR-CNRS 5523, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France

Reçu et acceptée le 20 juillet 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

## Résumé

Dans le cadre classique de la théorie de Kirchhoff–Love on étudie la modélisation asymptotique d’une plaque élastique mince en contact unilatéral avec frottement contre un obstacle rigide (problème de Signorini avec frottement). On observe d’abord que, quand l’épaisseur tend vers zéro, la force de frottement est d’un ordre moins élevé que la pression de contact. Elle doit donc formellement s’annuler dans le problème limite. On démontre en effet que toute famille de solutions de la suite des problèmes tridimensionnels de Signorini avec frottement (mis à l’échelle et indexés par l’épaisseur) converge fortement dans l’espace des déplacements vers l’unique solution d’un problème bidimensionnel de plaque de type Signorini *sans frottement*. *Pour citer cet article : J.-C. Paumier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 567–570.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Signorini’s problem in the Kirchhoff–Love theory of plates

## Abstract

In the framework of the Kirchhoff–Love asymptotic theory of elastic thin plates we consider the unilateral contact problem with friction for a plate on a rigid foundation (Signorini problem with friction). First, we notice, when the thickness vanishes, that the order of the friction force must be lower than that of the contact pressure. These two measures are connected by Coulomb law. Consequently, at least formally, the friction force must be vanishing when the thickness goes to zero. We actually prove that any sequence of solution of the sequence of three-dimensional scaled Signorini problems with friction strongly converges to the unique solution of a two-dimensional Signorini plate problem *without friction*. *To cite this article: J.-C. Paumier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 567–570.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## 1. Présentation du problème de Signorini avec frottement

Soit  $\omega$  un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\gamma$  et soit  $\varepsilon > 0$  un paramètre. On définit dans  $\mathbb{R}^3$  l’ouvert lipschitzien  $\Omega^\varepsilon = \omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  de point courant  $x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$  et on note la frontière latérale de cet ouvert  $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  ainsi que ses faces, respectivement, supérieure et inférieure :  $\bar{\Gamma}^\varepsilon = \omega \times \{\varepsilon\}$  et  $\underline{\Gamma}^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}$ . On pose maintenant  $V(\Omega^\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}$ . La trace d’une fonction  $v \in V(\Omega^\varepsilon)$  sur la face supérieure  $\bar{\Gamma}^\varepsilon$  est notée  $\bar{v}$ ; cette fonction appartient à l’espace des traces  $H_{00}^{1/2}(\bar{\Gamma}^\varepsilon)$  dont l’espace dual est noté  $H^{-1/2}(\bar{\Gamma}^\varepsilon)$ . La trace de  $v$  sur la face inférieure  $\underline{\Gamma}^\varepsilon$  est notée  $\underline{v}$ .

Adresse e-mail : Jean-Claude.Paumier@imag.fr (J.-C. Paumier).

Le domaine  $\Omega^\varepsilon$  est celui d'un *matériau linéairement élastique homogène et isotrope* de coefficients de lamé  $\lambda > 0$  et  $G > 0$ . Ce corps solide, appelé *plaque élastique*, est *encastré sur sa face latérale*  $\Gamma_0^\varepsilon$ . L'espace vectoriel des déplacements admissibles  $u = (u_i)$  sera donc :  $\vec{V}(\Omega^\varepsilon) = (V(\Omega^\varepsilon))^3$ .

Le tenseur linéarisé des déformations  $e^\varepsilon(v)$  a pour composantes :  $e_{ij}^\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(\partial v_j / \partial x_i^\varepsilon + \partial v_i / \partial x_j^\varepsilon)$ . La forme bilinéaire classique de l'élasticité s'écrit :

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} \{ \lambda e_{ii}^\varepsilon(u) e_{jj}^\varepsilon(v) + 2G e_{ij}^\varepsilon(u) e_{ij}^\varepsilon(v) \} dx^\varepsilon.$$

On suppose que la plaque est soumise dans  $\Omega^\varepsilon$ , à des forces de volume  $(f_i^\varepsilon) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$  et, sur la face inférieure de la plaque, à des forces de surface  $(g_i^\varepsilon) \in (L^2(\Gamma^\varepsilon))^3$ . Le travail virtuel correspondant est noté :

$$L^\varepsilon(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i dx^\varepsilon + \int_{\Gamma^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i d\sigma, \quad v \in V(\Omega^\varepsilon).$$

On se donne maintenant une *fonction d'interstice*  $u_3^0$  satisfaisant :  $u_3^0 \in H_0^2(\omega)$  et  $u_3^0 \geq 0$  sur  $\omega$ . La *condition de contact unilatéral* est définie par l'inégalité :  $\bar{v}_3 \leq \varepsilon u_3^0$  au sens des traces. On pose donc  $K(\Omega^\varepsilon) = \{v \in V(\Omega^\varepsilon) \mid \bar{v}_3 \leq \varepsilon u_3^0\}$ . L'ensemble des déplacements admissibles doit donc s'écrire :

$$\vec{K}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times K(\Omega^\varepsilon).$$

Soit  $\mu$  le coefficient de frottement de la face supérieure  $\bar{\Gamma}^\varepsilon$  contre l'obstacle rigide. On suppose que :  $\mu \in C^1(\bar{\omega})$  et  $\mu \geq 0$ .

Soit  $S^\varepsilon$  le *seuil de frottement*. On considère que  $S^\varepsilon$  est une mesure positive de l'espace  $H^{-1/2}(\bar{\Gamma}^\varepsilon)$  :  $S^\varepsilon \in H^{-1/2}(\bar{\Gamma}^\varepsilon)$  et  $S^\varepsilon \geq 0$ .

L'inconnue du problème est notée  $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$  et le champ tangent s'écrit  $u_T^\varepsilon = (u_\alpha^\varepsilon) = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ . Cette fonction  $u^\varepsilon$  doit satisfaire les (in)équations suivantes où les formes  $G_i^\varepsilon$  représentent les composantes de la *force de frottement* pour  $i = 1, 2$  et la *pression de contact* pour  $i = 3$  :

$$\text{trouver } u^\varepsilon \in \vec{K}(\Omega^\varepsilon) \text{ et } (G_i^\varepsilon) \in (H^{-1/2}(\bar{\Gamma}^\varepsilon))^3 \text{ tels que :} \tag{1}$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = L^\varepsilon(v) + \langle G_i^\varepsilon, \bar{v}_i \rangle, \quad \forall v \in \vec{V}(\Omega^\varepsilon), \tag{2}$$

$$\langle G_3^\varepsilon, \bar{v}_3 - \bar{u}_3^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega^\varepsilon), \tag{3}$$

$$\langle G_\alpha^\varepsilon, \bar{v}_\alpha - \bar{u}_\alpha^\varepsilon \rangle + \langle \mu S, |\bar{v}_T| - |\bar{u}_T^\varepsilon| \rangle \geq 0, \quad \forall v_T = (v_\alpha) \in (V(\Omega^\varepsilon))^2. \tag{4}$$

Ce problème admet classiquement une solution unique  $u^\varepsilon$ . Cette solution dépend du seuil de frottement donné  $S^\varepsilon$  : notons la  $\mathcal{U}^\varepsilon[S^\varepsilon]$  et notons aussi  $\mathcal{G}_3^\varepsilon[S^\varepsilon]$  la pression de contact qui en résulte. Suivant Nečas, Jarusek et Haslinger [3] une solution du *problème de Signorini avec frottement* est une fonction  $u^\varepsilon = \mathcal{U}^\varepsilon[S^\varepsilon]$  telle que  $S = S^\varepsilon \in H^{-1/2}(\bar{\Gamma}^\varepsilon)$  soit solution de l'équation

$$\mu S = -\mu \mathcal{G}_3^\varepsilon[S]. \tag{5}$$

Dans Jarusek [2] on trouve des *conditions suffisantes* pour que (5) ait au moins une solution : zone de contact  $\Gamma_c$  compacte et régulière, support de  $\mu$  inclus dans l'intérieur de  $\Gamma_c$  et borne supérieure de  $\mu$  assez petite. Il est possible de choisir  $\Gamma_c \subset \bar{\Gamma}$  pour satisfaire ces conditions dans le cas de la plaque (voir [4]).

## 2. Mise à l'échelle

Notons  $\chi^\varepsilon$  l'application  $\mathbb{R}^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, \varepsilon x_3) = x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ . Dans cette section on se ramène à l'ouvert fixe  $\Omega = \omega \times ]-1, +1[$  qui vérifie  $\chi^\varepsilon(\Omega) = \Omega^\varepsilon$ . On note  $\bar{\Gamma} = \omega \times \{1\}$  et  $\underline{\Gamma} = \omega \times \{-1\}$  les faces supérieure et inférieure de cet ouvert ainsi que  $\Gamma_0 = \gamma \times ]-1, 1[$  sa face latérale.

On pose  $V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$  ainsi que  $\vec{V}(\Omega) = (V(\Omega))^3$ . La trace  $\bar{v}$  d'une fonction  $v \in V(\Omega)$  sur  $\bar{\Gamma}$  est dans l'espace  $H_{00}^{1/2}(\bar{\Gamma})$  qui a pour dual  $H^{-1/2}(\bar{\Gamma})$ . La trace de  $v$  sur  $\underline{\Gamma}$  est notée  $\underline{v}$ .

On obtient classiquement le *modèle de Kirchhoff-Love de plaque mince* en effectuant un changement d'échelle sur la solution et sur les données (voir par exemple Ciarlet [1]) :

1. À la solution  $u^\varepsilon \in \vec{V}(\Omega^\varepsilon)$  du problème (1)–(4) on associe la fonction  $u(\varepsilon) \in \vec{V}(\Omega)$  telle que :

$$u_1^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 u_1(\varepsilon), \quad u_2^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 u_2(\varepsilon), \quad u_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon u_3(\varepsilon).$$

Les fonctions tests subissent la même transformation  $\vec{V}(\Omega) \ni v \mapsto v^\varepsilon \in \vec{V}(\Omega^\varepsilon)$  en posant :  $v_1^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 v_1$ ,  $v_2^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 v_2$ ,  $v_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon v_3$ .

2. On suppose que :  $L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^5 L(v)$ ,  $\forall v \in \vec{V}(\Omega)$  où :  $L(v) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_\Gamma g_i \underline{v}_i d\sigma$ , c'est à dire qu'il existe des fonctions  $f_i \in L^2(\Omega)$  et  $g_i \in L^2(\Gamma)$  indépendantes de  $\varepsilon$  et vérifiant :

$$f_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 f_\alpha, \quad f_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 f_3, \quad g_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 g_\alpha, \quad g_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3.$$

La condition de contact unilatéral mise à l'échelle est définie par :  $\bar{v}_3 \leq u_3^0$ . Nous noterons donc :  $K(\Omega) = \{v \in V(\Omega) \mid \bar{v}_3 \leq u_3^0\}$ . L'ensemble des déplacements admissibles mis à l'échelle est donc :

$$\vec{K}(\Omega) = V(\Omega) \times V(\Omega) \times K(\Omega).$$

Le tenseur  $e^\varepsilon(v^\varepsilon)$  devient :  $e_{\alpha\beta}^\varepsilon(v^\varepsilon) \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 e_{\alpha\beta}(v)$ ,  $e_{\alpha 3}^\varepsilon(v^\varepsilon) \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon e_{\alpha 3}(v)$ ,  $e_{33}^\varepsilon(v^\varepsilon) \circ \chi^\varepsilon = e_{33}(v)$  où  $e_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ . En divisant par  $\varepsilon^5$ , la forme bilinéaire de l'élasticité s'écrit donc :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, v) &= \int_\Omega \{ \lambda e_{\alpha\alpha}(u) e_{\beta\beta}(v) + 2G e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v) \} dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega \{ \lambda (e_{\alpha\alpha}(u) e_{33}(v) + e_{33}(u) e_{\alpha\alpha}(v)) + 4G e_{\alpha 3}(u) e_{\alpha 3}(v) \} dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^4} \int_\Omega (\lambda + 2G) e_{33}(u) e_{33}(v) dx. \end{aligned}$$

Avant d'écrire le problème de contact sur l'ouvert  $\Omega$  nous devons faire une mise à l'échelle de la force de frottement ( $G_\alpha^\varepsilon$ ), de la pression de contact  $G_3^\varepsilon$  et du seuil de frottement  $S^\varepsilon$ . Bien que ces choix seront justifiés *a posteriori* nous pouvons remarquer que la pression exercée sur la face inférieure de la plaque satisfait :  $g_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3$ . Pour rester dans le cadre de la théorie des plaques de Kirchhoff–Love la pression de contact et le seuil de frottement doivent être logiquement du même ordre par rapport à  $\varepsilon$  puisque d'après (5) ces deux mesures sont, au signe près, identiques pour le problème de Signorini avec frottement. La force de frottement doit être du même ordre que la force tangentielle  $g_\alpha^\varepsilon$  qui s'exerce sur la face inférieure. Nous poserons donc que  $G_\alpha^\varepsilon, G_3^\varepsilon$  et  $S^\varepsilon$  satisfont les relations :

$$\langle G_\alpha^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = \varepsilon^3 \langle G_\alpha(\varepsilon), v \rangle, \quad \langle G_3^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = \varepsilon^4 \langle G_3(\varepsilon), v \rangle, \quad \langle S^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = \varepsilon^4 \langle S(\varepsilon), v \rangle,$$

où les formes  $G_i(\varepsilon)$  et  $S(\varepsilon)$  sont dans  $H^{-1/2}(\bar{\Gamma})$  et où  $S(\varepsilon)$  est une mesure positive donnée.

On supposera en outre que la suite  $\{S(\varepsilon)\}$  des seuils converge au sens suivant :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon S(\varepsilon) = 0, \quad \text{dans } H^{-1}(\omega)\text{-faible } \star. \quad (6)$$

Le problème mis à l'échelle s'écrit :

$$\text{trouver } u(\varepsilon) \in \vec{K}(\Omega) \text{ et } (G_i(\varepsilon)) \in (H^{-1/2}(\bar{\Gamma}))^3 \text{ tels que :} \quad (7)$$

$$\forall v \in \vec{V}(\Omega) : a_\varepsilon(u(\varepsilon), v) = L(v) + \langle G_i(\varepsilon), \bar{v}_i \rangle, \quad (8)$$

$$\langle G_3(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \geq 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega), \quad (9)$$

$$\langle G_\alpha(\varepsilon), \bar{v}_\alpha - \bar{u}_\alpha(\varepsilon) \rangle + \varepsilon \langle \mu S(\varepsilon), |\bar{v}_T| - |\bar{u}_T(\varepsilon)| \rangle \geq 0, \quad \forall v_T \in (V(\Omega))^2. \quad (10)$$

Ce problème est équivalent au problème (1)–(4). Il admet donc une unique solution  $\mathcal{U}[\varepsilon, S(\varepsilon)]$  et on note  $\mathcal{G}_3[\varepsilon, S(\varepsilon)]$  la pression de contact associée. Grâce à cette équivalence on obtient facilement les analogues de la définition du problème de Signorini mis à l'échelle et du résultat d'existence dû à Jarusek : une solution du problème de Signorini avec frottement mis à l'échelle sera donc une fonction  $u(\varepsilon) = \mathcal{U}[\varepsilon, S(\varepsilon)]$  telle que  $S = S(\varepsilon) \in H^{-1/2}(\bar{\Gamma})$  soit solution de l'équation :

$$\mu S = -\mu \mathcal{G}_3[\varepsilon, S]. \quad (11)$$

### 3. Convergence de la suite $u(\varepsilon)$

Définissons un sous-espace fermé  $\overrightarrow{V}_{\text{KL}}(\Omega) = \{v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \mid e_{i3}(v) = 0\}$ . Cet espace, appelé *espace de Kirchhoff–Love*, est isomorphe à l'espace  $\overrightarrow{V}(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$  via l'isomorphisme :  $\overrightarrow{V}(\omega) \ni \eta \mapsto J_{\text{KL}}(\eta) = v \in \overrightarrow{V}_{\text{KL}}(\Omega)$  tel que  $v_\alpha(x) = \eta_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha \eta_3(x_1, x_2)$ , pour  $\alpha = 1, 2$  et  $v_3(x) = \eta_3(x_1, x_2)$ . On définit aussi le convexe  $K(\omega) = \{\eta_3 \in H_0^2(\omega) \mid \eta_3 \leq u_3^0\}$  et on pose  $\overrightarrow{K}(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times K(\omega)$ .

Définissons la forme bilinéaire  $a_0^*$  sur l'espace  $(V_{\text{KL}}(\Omega))^2$  où  $\lambda^* = 2\lambda G/(\lambda + 2G)$  :

$$a_0^*(u, v) = \int_{\Omega} \{ \lambda^* e_{\alpha\alpha}(u) e_{\beta\beta}(v) + 2G e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v) \} dx.$$

**THÉORÈME 3.1.** – *On suppose que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites et pour chaque  $\varepsilon \in ]0, 1[$  on note  $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$  la solution du problème (7)–(10) :*

- (i) *soit pour une famille  $\{S(\varepsilon)\}$  de seuils donnés,*
- (ii) *soit pour une famille  $\{S(\varepsilon)\}$  de seuils solutions des équations (11).*

*Définissons les éléments  $u(0) \in V_{\text{KL}}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$  et  $G_3(0) \in H^{-2}(\omega)$  unique solution des inéquations :*

$$a_0^*(u(0), v) = L(v) + \langle G_3(0), v_3 \rangle, \quad \forall v \in \overrightarrow{V}_{\text{KL}}(\Omega), \tag{12}$$

$$\langle G_3(0), v_3 - u_3(0) \rangle \geq 0, \quad \forall v_3 \in K(\omega). \tag{13}$$

*Alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la suite  $\{u(\varepsilon)\}$  converge fortement dans  $(H^1(\Omega))^3$  vers  $u(0)$ . De plus, la suite des forces de frottement  $\{(G_\alpha(\varepsilon))\}$  converge faiblement  $\star$  (fortement pour le cas (ii)) vers zéro dans  $(H^{-1}(\omega))^2$  et la suite des pressions de contact  $\{G_3(\varepsilon)\}$  converge fortement dans  $H^{-2}(\omega)$  vers l'élément  $G_3(0)$ .*

### 4. Idées de la démonstration du théorème

On commence par démontrer le résultat quand la famille  $\{S(\varepsilon)\}$  des seuils est donnée. Dans ce cas on pourrait utiliser l'outil de la  $\Gamma$ -convergence en associant au problème (7)–(10) une famille  $\{J(\varepsilon)\}$  de fonctionnelles à minimiser. On a préféré (voir [4]) procéder de façon classique [1] en introduisant le tenseur  $\kappa(\varepsilon)$  tel que  $\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon) = e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))$ ,  $\kappa_{\alpha 3}(\varepsilon) = \kappa_{3\alpha}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))$  et  $\kappa_{33}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(u(\varepsilon))$  : on démontre d'abord que les suites  $\{\kappa(\varepsilon)\}$  et  $\{u(\varepsilon)\}$  sont bornées et on en déduit qu'il existe des éléments  $\kappa(0) \in (L^2(\Omega))_s^{3 \times 3}$  et  $u(0) \in \overrightarrow{V}(\Omega)$  tels que :  $\kappa(\varepsilon) \rightharpoonup \kappa(0)$  et  $u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0)$  (pour des sous-suites). On voit aisément que  $u_3(0) \leq u_3^0$  et  $e_{i3}(u(0)) = 0$ ; donc  $u(0) \in \overrightarrow{V}_{\text{KL}}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ . En utilisant des choix particuliers de fonctions tests dans l'équation (8) on identifie  $\kappa_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0))$ ,  $\kappa_{\alpha 3}(0) = 0$  et  $\kappa_{33}(0) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G} e_{\alpha\alpha}(u(0))$ . Avec (10) l'hypothèse (6) entraîne que  $G_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup^* 0$  dans  $H^{-1}(\omega)$ . Avec (9) on obtient que  $G_3(\varepsilon) \rightharpoonup^* G_3(0)$  dans  $H^{-2}(\omega)$  où  $G_3(0)$  vérifie avec  $u(0)$  l'équation variationnelle (12). Le « point crucial » est que la limite de la suite  $\{(G_3(\varepsilon), \overline{\pi}_3(\varepsilon))\}$  n'est autre que  $\langle G_3(0), u_3(0) \rangle$ . Les limites  $u(0)$  et  $G_3(0)$  sont uniques à vérifier (12), (13) et donc *toutes les suites convergent* (faiblement). La preuve des convergences fortes utilise le « point crucial ». On démontre enfin avec (8) que la limite faible  $\star$  (forte pour Signorini) de la suite  $\{\varepsilon G_3(\varepsilon)\}$  est nulle. La famille  $\{S(\varepsilon)\}$  satisfait donc l'hypothèse (6) dans le cas où  $S(\varepsilon) = -G_3(\varepsilon)$ , c'est à dire dans le cas où  $u(\varepsilon)$  est solution du problème de Signorini avec frottement.

### Références bibliographiques

- [1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume II: Theory of Plates*, North-Holland, 1997.
- [2] J. Jarusek, Contact problem with bounded friction: Coercive case, *Czechoslovak Math. J.* 33 (108) (1983) 237–261.
- [3] J. Nečas, J. Jarusek, J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (17) 5 (1980) 796–811.
- [4] J.-C. Paumier, Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement contre un obstacle rigide, Prépublication L.M.C., 2002, <http://www-lmc.imag.fr/~paumier/signoplaque.ps>.