C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 427–429

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Sur la propriété de la moyenne restreinte pour les fonctions biharmoniques

Mohamed El Kadiri

BP 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc

Reçu le 26 juin 2002 ; accepté le 25 juillet 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé On établit une réciproque du théorème de la moyenne pour les fonctions biharmoniques classiques. ***Pour citer cet article : M. El Kadiri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 427–429.***

On the restricted mean property for the biharmonic functions

Abstract We prove a converse to the mean value theorem for classical biharmonic functions. ***To cite this article: M. El Kadiri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 427–429.***

1. Introduction

Il est bien connu que toute fonction harmonique h intégrable dans un domaine Ω de $\mathbf{R}^n$ vérifie la formule de la moyenne sur toute boule $B = B_r(x)$ de centre $x \in \Omega$ et de rayon $r > 0$ telle que $B \subset \Omega$:

$$h(x) = \frac{1}{|B|} \int_B h \, \mathrm{d}\lambda,$$

où $|B|$ est le volume de la boule B et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

Inversement, toute fonction intégrable h sur Ω qui vérifie la formule de la moyenne sur toute boule $B \subset \Omega$ est harmonique dans Ω.

On peut même seulement exiger de h d'être localement intégrable et de vérifier la formule de la moyenne sur certaines boules de Ω pour qu'elle soit harmonique dans Ω (on dit alors que h vérifie la propriété de la moyenne restreinte). Ceci a fait l'objet de nombreux travaux anciens et récents. Lorsque Ω est borné, Kellog [8] et Volterra [12] ont montré que cela est vrai lorsque h est continue sur $\overline{\Omega}$, ensuite des résultats positifs ont été obtenus sous des conditions restrictives sur les rayons des boules (Akcoglu et Sharpe [1], Baxter [2], Feller [4], Heath [7], Veech [10] et [11]). Récemment Hansen et Nadirashvili [5,6] ont obtenu des résultats plus généraux.

Dans [5] et [6] Hansen et Nadirashvili ont montré que, sous certaines conditions sur les fonctions f et r, si f vérifie la propriété de la moyenne restreinte, alors f est harmonique dans Ω.

Adresse e-mail : elkadiri@fsr.ac.ma (M. El Kadiri).

S1631-073X(02)02517-7/FLA

Notre but dans ce travail est d'étendre ces résultats aux fonctions biharmoniques, pour répondre au problème de savoir si une fonction qui possède la propriété de la moyenne biharmonique restreinte est biharmonique. La méthode utilisée consiste à trouver des mesures de représentation des fonctions harmoniques en liaison avec la formule de la moyenne pour les fonctions biharmoniques, auquelles seront appliqués les résultat de [6] après avoir vérifié que les conditions de [6] sont remplies.

Le mot fonction signifiera toujours, sauf mention expresse du contraire, fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Tous les résultats de ce travail s'étendent sans difficulté aux fonctions polyharmoniques d'ordre > 2. Nous n'avons considéré le cas des fonctions biharmoniques que pour des raisons de simplicité.

2. Enoncé des résultats

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$, $\Omega \neq \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, de complémentaire non polaire si $n = 2$. Considérons une fonction $r : \Omega \to \mathbf{R}_+$ telle que $r(x) \leqslant d(x, C\Omega) = \varrho(x)$ pour tout $x \in \Omega$. On note $B(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon $r(x)$.

On rappelle qu'une fonction biharmonique f dans Ω, i.e. solution de l'équation $\Delta^2 u = 0$, vérifie la formule de la moyenne biharmonique

$$f(x) = \frac{1}{|B|} \int_B f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{r^2}{2(n+2)} \Delta f(x),$$

pour tout $x \in \Omega$ et toute boule B de centre x et de rayon $r > 0$, $B \subset \overline{B} \subset \Omega$. Si $f \geqslant 0$ ou intégrable sur toute boule ouverte de Ω, cette formule est vérifiée pour toute boule (ouverte ou fermée) $B \subset \Omega$ (voir [9]).

Soit k une fonction harmonique $\geqslant 1$ dans Ω qu'on se fixera dans la suite. On dit qu'une fonction f sur Ω est k-bornée s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f| \leqslant ck$.

THÉORÈME 2.1. – *Soit r une fonction réelle sur Ω telle que $0 < r \leqslant \varrho$ et soit f une fonction intégrable sur les boules $B(x)$, $x \in \Omega$, et dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction continue k-bornée et telle que*

$$f(x) = \frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)} \Delta f(x),$$

pour tout $x \in \Omega$. Alors f est biharmonique dans Ω.

THÉORÈME 2.2. – *Soit r une fonction réelle sur Ω telle que $0 < r \leqslant \varrho$, bornée inférieurement sur tout compact par une constante > 0 et soit f une fonction intégrable sur les boules $B(x)$, $x \in \Omega$, et dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction k-bornée et telle que*

$$f(x) = \frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} f \,\mathrm{d}\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)} \Delta f(x),$$

pour tout $x \in \Omega$. Alors f est biharmonique dans Ω.

Idée de la démonstration. – Pour toute boule $B = B_r(x) \subset \Omega$, posons

$$w_B(x, z) = G_U(x, z) - \frac{1}{|B|} \int_B G_U(y, z) \,\mathrm{d}\lambda(y),$$

où U est un domaine borné de $\mathbf{R}^n$ contenant $\overline{B}$ et G_U sa fonction de Green. La fonction w_B ne dépend pas de U et on a $w_B(x, z) = 0$ pour $z \in \mathbf{R}^n \setminus B$. Pour tout $x \in \Omega$, notons μ_x la mesure $\frac{2(n+2)}{r(x)^2} w_{B(x)}(x, \cdot)\lambda$. Alors, pour tout $x \in \Omega$, μ_x est une mesure de probabilité invariante par rotations autour de x. On montre que les mesures μ_x vérifient toutes les conditions de [6], ce qui permet d'en appliquer les résultats. Pour ce faire, il suffit de remarquer que les conditions des théorèmes entrainent

$$\Delta f(x) = \int \Delta f \, \mathrm{d}\mu_x.$$

Les détails des démonstrations de ces résultats paraîtront dans [3].

Remarques. – 1. Si $r(x) < \varrho(x)$ pour tout $x \in \Omega$, l'hypothèse selon laquelle f est localement intégrable entraîne que f est intégrable sur les boules $B(x)$, $x \in \Omega$.

2. Les résultats sont vrais aussi pour toute fonction harmonique $k \geqslant 0$, car on peut se ramener au cas $k \geqslant 1$ en remplaçant k par $k+1$.

Références bibliographiques

[1] M.A. Akcoglu, R.W. Sharpe, Ergodic theory and boundaries, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968) 447–460.
[2] J.R. Baxter, Restricted mean values and harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972) 451–463.
[3] M. El Kadiri, Une réciproque du théorème de la moyenne pour les fonctions biharmoniques, Aequationes Math., à paraître.
[4] W. Feller, Boundaries induced by nonegative matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956) 19–54.
[5] W. Hansen, N. Nadirashvili, A converse to the mean value theorem for harmonic functions, Acta Math. 171 (1993) 139–163.
[6] W. Hansen, N. Nadirashvili, Mean values and harmonic functions, Math. Ann. 297 (1) (1993) 157–170.
[7] D. Heath, Functions possesing restricted mean value properties, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973) 588–595.
[8] O.D. Kellog, Converses of Gauss's theorem on the arithmetic mean, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934) 227–242.
[9] M. Nicolescu, Les fonctions polyharmoniques, Hermann, Paris, 1936.
[10] W.A. Veech, A zero-one law for a class of random walks and a converse to Gauss's mean value theorem, Ann. of Math. 97 (1973) 189–216.
[11] W.A. Veech, A converse to the mean value theorem for harmonic functions, Amer. J. Math. (2) 97 (1975) 1007–1027.
[12] V. Volterra, Alcune osservationi sopra proprietà atte individuare una funzione, Atti Reale Accad. Lincei 18 (1909) 263–266.