

Prise en compte d'un fort déséquilibre cinétique par un modèle aux demi-moments

Bruno Dubroca^a, Axel Klar^b

^a CEA-CESTA, BP 2, 33114 Le Barp cedex, France

^b Department of Mathematics, TU Darmstadt, Schlossgartenstr. 7 (341), 64289 Darmstadt, Germany

Reçu le 3 septembre 2002 ; accepté après révision le 13 septembre 2002

Note présentée par Olivier Pironneau.

Résumé

On utilise le principe d'entropie minimum développé dans [6] pour l'équation de Boltzmann BGK pour construire une nouvelle méthode aux moments. Cette méthode est basée sur la décomposition de l'espace des vitesses en partie positive et négative. Ce modèle aux demis moments possède de bonnes propriétés (hyperbolicité, réalisabilité, conservativité, dissipation locale de l'entropie, conditions aux limites simples, bon comportement asymptotique près de l'équilibre cinétique qui redonne les équation de Navier–Stokes). Ce modèle est approché par un schéma particulièrement simple et quelques résultats numériques permettent d'illustrer l'intérêt de la méthode. *Pour citer cet article : B. Dubroca, A. Klar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 699–704.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Half moment model to take into account strong kinetic non-equilibrium

Abstract

In this paper, the minimum entropy introduced in [6] for Boltzmann-BGK equation is used to build a new moment method. This method is based on space velocity decomposition in two positive and negative parts. As a result, this half moment model satisfies some good properties (hyperbolicity, realisability, conservativity, entropy locally dissipated, simple boundary conditions, good asymptotic behavior near kinetic equilibrium which leads to Navier–Stokes equations). Moreover, an efficient numerical scheme and numerical results are presented. *To cite this article: B. Dubroca, A. Klar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 699–704.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Computations of high altitude flows in the transitional regime between the kinetic and continuum limits are known to be difficult. Indeed, the flow is far from kinetic equilibrium and usual numerical methods for Boltzmann equation are quite expensive in the transitional regime where the free mean path is small. To overcome this problem, Grad and some other authors [5,9,2,6,4] introduced some macroscopic models by taking the moments of Boltzmann equation.

Levermore in [6] proposed a nonlinear closure based on a distribution function of the form $f(x, v, t) = \exp(\alpha(x, t) \cdot m(v))$. Every system derived is hyperbolic and possesses a locally dissipated entropy. However, these systems are not explicitly known (physical fluxes cannot be expressed explicitly). Moreover, as a model do not possess the property of realizability of its predicted moments, it can break down at some time.

Adresses e-mail : Bruno.Dubroca@cea.fr (B. Dubroca); klar@mathematik.tu-darmstadt.de (A. Klar).

To solve these problems, we proposed a new half moment method based on space velocity decomposition in two positive and negative parts, similarly to the idea introduced in [3] for radiative transfer. In the main part of this paper, (x, v) belongs to the $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ space. The half moment method is introduced by using the moments $\vec{m}(v) = (\vec{m}_+(v), \vec{m}_-(v))$, where $\vec{m}_\pm(v) = (1_1^\pm, v_1^\pm, (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)1_1^\pm/2)$, and where $1^+(v) = 1$ if $v_1 > 0$ and $1^+(v) = 0$ if $v_1 < 0$. The function 1^- is defined by $1^-(v) = 1 - 1^+(v)$ and the function v_1^\pm by $v_1^\pm(v) = v_1 1^\pm(v)$. The moment system is closed by taking a distribution function having the form given by (6). The moment system can be written, finally

$$(\mathcal{P}^\pm) \quad \partial_t Q_\pm + \partial_x F_\pm = (Q_\pm(\mathcal{K}_M) - Q_\pm)/\tau,$$

where the half moments Q_\pm , the half physical flux F_\pm and the half moment $Q_\pm(\mathcal{K}_M)$ of the Maxwellian function are given by (7, 9, 10, 11).

The eigenvalues of the system (\mathcal{P}^\pm) are found to have always the same sign: positive for (\mathcal{P}^+) and nonpositive for (\mathcal{P}^-) . As a result, this half moment model satisfies some very simple boundary conditions: Q^+ is given on left boundaries and Q^- is given on right boundaries. Moreover, the equations are discretized using a simple and straightforward numerical scheme. Due to the sign of the eigenvalues, one obtains

$$(Q_{i,\pm}^{n+1} - Q_{i,\pm}^n)/\Delta t \pm (F_{i,\pm}^\omega - F_{i\mp 1,\pm}^\omega)/\Delta x = (Q_\pm(\mathcal{K}_{i,\mathcal{M}}^\omega) - Q_{i,\pm}^\omega)/\tau.$$

Fig. 1 shows a comparison of the inverse of shock length for different models and for various Mach numbers obtained using the one-dimensional steady shock wave test case in the argon gas. We found a good agreement between the half moment model with the kinetic and experimental profiles. We can see also in Fig. 2, that half moment method computes a smooth solution, similarly to the kinetic equation, without involving numerical shocks as classical moments methods can do (see [7]).

Extensions to multidimensional cases can be based on quarter decomposition of velocity space in two-dimensional case. In this case the moment vector is taken as $\vec{m}(v) = (\vec{m}_{+,+}(v), \vec{m}_{+,-}(v), \vec{m}_{-,+}(v), \vec{m}_{-,-}(v))$. The simplest choice is obtained by setting the quarter moments as: $\vec{m}_{\pm,\pm}(v) = (1_1^\pm 1_2^\pm, v_1^\pm, v_2^\pm, (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)1_1^\pm 1_2^\pm/2)$. This will be addressed in a following paper.

1. Introduction

La simulation numérique d'écoulements raréfiés ou en régime transitionnel repose sur des modèles cinétiques prenant en compte le caractère moléculaire du gaz. Numériquement, ce problème est difficile et coûteux à approcher. Aussi de nombreux auteurs [5,9,2,6,4] ont cherché à contourner cette difficulté en introduisant des modèles macroscopiques pour décrire ces écoulements. Ces modèles prennent toute leur importance si l'on s'intéresse à des domaines physiques où l'hydrodynamique est couplée : astrophysique (évolution stellaire), physique des plasmas chauds et denses (fusion inertielle), rentrée hypersonique (évolution de la protection thermique) par exemple.

Les modèles macroscopiques proposés dans [5,9,2] reposent sur une fermeture aux moments des équations de Boltzmann grâce à un développement de la fonction de distribution des particules sur un espace de polynôme bien choisi. Malheureusement, ces modèles ne sont hyperboliques que pour des nombres de Mach relativement faibles et nécessitent de nombreux moments pour rendre compte d'un déséquilibre cinétique important [9].

Levermore dans [6] a contourné le problème en utilisant le principe de minimisation d'entropie pour fermer les systèmes aux moments. Ce principe est introduit en thermodynamique étendue pour l'étude d'écoulements hors équilibre, que l'on cherche à modéliser par des systèmes hyperboliques, à vitesses de propagation finie. Malheureusement, ces modèles souffrent de problème de réalisabilité (voir Paragraphe 2) et les systèmes obtenus ne sont pas explicites.

L'objet de cette Note est de proposer une nouvelle méthode basée sur la décomposition de l'espace des vitesses en partie positive et négative d'après une idée introduite dans [3] pour le transfert radiatif et une dé-

marche similaire utilisée dans [2] pour décomposer la fonction de distribution f des particules en demis polynômes de Legendre. Nous détaillons la fermeture de Levermore [6] dans le Paragraphe 2. Notre méthode est introduite dans le Paragraphe 3. L'extension au cas multidimensionnel est abordée dans le Paragraphe 4.

2. Fermeture par le principe d'entropie minimum

Par la suite, V représente l'espace des vitesses \mathbb{R}^D et nous notons par $f = f(v)$, $v \in V$ une fonction de distribution des particules sur V . Nous définissons alors $\langle f \rangle = \int_{v \in V} f(v) dv$ comme la moyenne de f sur V . La fermeture aux moments introduite par Levermore [6] repose sur la prise de moyenne des équations de Boltzmann BGK qui décrivent l'évolution de la fonction de distribution des particules $f(t, x, v)$:

$$\partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f = (\mathcal{E}(f) - f)/\tau, \quad (1)$$

où $\mathcal{E}(f) = \rho/(2\pi RT)^{D/2} \exp(-|\vec{v} - \vec{u}|^2/(2RT))$ est la Maxwellienne qui représente l'équilibre cinétique et où ρ , \vec{u} , T sont la densité, la vitesse et la température associées à f .

Si \vec{m} représente un vecteur dont les éléments sont des polynômes qui dépendent de la vitesse microscopique \vec{v} , nous pouvons déduire un système d'équations macroscopiques en moyennant (1)

$$\partial_t \langle \vec{m} f \rangle + \nabla_x \cdot \langle \vec{m} \otimes \vec{v} f \rangle = \langle \vec{m} (\mathcal{E}(f) - f) \rangle / \tau. \quad (2)$$

Le système (2) est fermé (voir [6]) en considérant une fonction de distribution de la forme $f = \exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{m})$ déduite à partir du *principe d'entropie minimum généralisée* suivant :

$$f = \min_{g \in \mathcal{A}(\vec{\rho})} \langle g \ln g \rangle, \quad \mathcal{A}(\vec{\rho}) = \{g \geq 0 \mid \langle g \vec{m} \rangle = \vec{\rho}\}. \quad (3)$$

Une fois la fermeture (3) obtenue, le système aux moments prend la forme suivante :

$$\partial_t \vec{\rho} + \nabla_x \cdot \vec{j}(\vec{\rho}) = \vec{r}(\vec{\rho}), \quad (4)$$

où $\vec{\rho} = \langle \vec{m} f \rangle$, $\vec{j}(\vec{\rho}) = \langle \vec{v} \wedge \vec{m} f \rangle$ et $\vec{r}(\vec{\rho}) = (\mathcal{E}(\vec{\rho}) - \vec{\rho})/\tau$. La fonction f est la solution du problème de minimisation (3) et $\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \langle \vec{m} \mathcal{E}(f) \rangle$.

Ce système est défini aussi longtemps que $\vec{\rho} \in \mathcal{D}(\vec{j})$, où $\mathcal{D}(\vec{j})$ est l'ensemble des moments $\vec{\rho}$ tel que le problème (3) possède une solution de la forme $f = \exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{m})$. Le principal résultat établi dans [6] assure que le système précédent est bien posé : *le système (4) est hyperbolique et possède une entropie qui est localement dissipée.*

Malheureusement, les flux $\vec{j}(\vec{\rho})$ ne sont pas calculables explicitement, comme par exemple dans le modèle aux 14 moments. Ce modèle prend en compte un fort déséquilibre cinétique en considérant le tenseur de pression et le flux de chaleur comme de nouvelles inconnues du problème : $\vec{m} = (1, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{v}, \vec{v}|\vec{v}|^2, |\vec{v}|^4)$. Ce modèle est le premier de la hiérarchie des modèles aux moments de Levermore qui est plus général que les équations de Navier–Stokes.

De plus, le système (4) peut ne plus être défini par perte de réalisabilité des moments associés : si $\vec{\rho}(s) \in \mathcal{D}(\vec{j})$, $0 \leq s < t$, alors il peut arriver que $\vec{\rho}(t) \notin \mathcal{D}(\vec{j})$. C'est par exemple le cas pour le modèle aux 14 moments.

3. Modèle aux demis moments

Afin d'essayer de reproduire des déséquilibres cinétiques importants, tout en restant analytique et réalisable nous allons considérer une approche aux moments portant sur une décomposition de l'espace des vitesses en partie positive et négative. Ceci est naturel si l'on pense que le bilan d'un flux de particules traversant une paroi est en fait la somme de deux demis flux de particules : celles allant de gauche à droite ($v_1 > 0$) et réciproquement ($v_1 < 0$).

Nous allons considérer dans ce paragraphe un problème monodimensionnel en espace et tridimensionnel en vitesse. Nous aborderons l'extension au cas multidimensionnel en espace dans le Paragraphe 4. Par la suite toute quantité indicée par $i = 1, 3$ représentera la composante d'un vecteur dans la direction i . Pour

introduire notre modèle nous introduisons un nouveau vecteur \vec{m} défini sur les deux demis espaces de vitesses :

$$\vec{m}(\vec{v}) = (\vec{m}_+(\vec{v}), \vec{m}_-(\vec{v})), \quad \text{où } \vec{m}_\pm(\vec{v}) = (1_\pm^\pm, v_1^\pm, (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)1_\pm^\pm/2), \quad (5)$$

où $1^+(\vec{v}) = 1$ si $v_1 > 0$ et $1^+(\vec{v}) = 0$ si $v_1 < 0$. La fonction 1^- est défini par $1^-(\vec{v}) = 1 - 1^+(\vec{v})$ et la fonction v_1^\pm par $v_1^\pm(\vec{v}) = v_1 1^\pm(\vec{v})$.

La fonction f déduite à partir de la fermeture (3, 5) peut se mettre sous la forme équivalente

$$f(\vec{v}) = (C_+ 1_+^+ + C_- 1_-^-) \exp(- (a_+ v_1^+ - k_+ 1_+^+)^2 - (a_+ v_2 1_+^+)^2 - (a_+ v_3 1_+^+)^2 - (a_- v_1^- - k_- 1_-^-)^2 - (a_- v_2 1_-^-)^2 - (a_- v_3 1_-^-)^2), \quad (6)$$

qui est plus agréable à manipuler où $\mathcal{K}_\pm = (C_\pm, a_\pm, k_\pm)$ est un système de paramètres qui déterminent f et qui peuvent se déduire des paramètres de Lagrange $\vec{\alpha}$.

Une fois la fermeture (6) obtenue, le système aux moments obtenu en moyennant les équations de Boltzmann BGK se met sous la forme de deux systèmes hyperboliques couplés seulement par le terme de relaxation apparaissant au second membre. Si l'on introduit les vecteur

$$Q_\pm = Q_\pm(\mathcal{K}_\pm) = \langle \vec{m}_\pm(\vec{v}) f(\vec{v}) \rangle, \quad F_\pm = F_\pm(Q_\pm) = \langle v_1 \vec{m}_\pm(\vec{v}) f(\vec{v}) \rangle, \quad (7)$$

des demis moments Q_\pm et de leur flux F_\pm ce système prend alors la forme suivante :

$$(\mathcal{P}^\pm) \quad \partial_t Q_\pm + \partial_x F_\pm = (Q_\pm(\mathcal{K}_{\mathcal{M}}) - Q_\pm)/\tau. \quad (8)$$

Les vecteurs $Q_\pm(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$ ne sont autre que les vecteurs des demis moments calculés à partir de la Maxwellienne $\mathcal{E}(f)$. Le vecteur $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$ représente les vecteurs paramètres \mathcal{K}_\pm qui dans le cas d'une Maxwellienne sont égaux et qui peuvent se calculer aisément à partir des paramètres ρ, u, T de la Maxwellienne $\mathcal{E}(f)$ et la constante R du gaz considéré :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{M}} = \left(\frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}}, \frac{1}{\sqrt{2RT}}, \frac{u_1}{\sqrt{2RT}} \right), \quad \text{où } \frac{Q_+ + Q_-}{2} = \left(\rho, \rho u_1, \frac{\rho}{2}(3RT + u_1^2) \right). \quad (9)$$

Les demis moments Q_\pm peuvent s'exprimer aisément à partir des vecteurs paramètres \mathcal{K}_\pm

$$Q_\pm = \frac{1}{8a_\pm^5} \begin{pmatrix} 4a_\pm^2 C_\pm \pi^{3/2} (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \\ 4a_\pm C_\pm \pi (\sqrt{\pi} k_\pm (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm \exp(-k_\pm^2)) \\ C_\pm \pi (\sqrt{\pi} (3 + 2k_\pm^2) (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm 2k_\pm \exp(-k_\pm^2)) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

ainsi que les vecteurs flux F_\pm

$$F_\pm = \frac{1}{8a_\pm^6} \begin{pmatrix} 4a_\pm^2 C_\pm \pi (\sqrt{\pi} k_\pm (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm \exp(-k_\pm^2)) \\ 2a_\pm C_\pm \pi (\sqrt{\pi} (1 + 2k_\pm^2) (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm 2k_\pm \exp(-k_\pm^2)) \\ C_\pm \pi (\sqrt{\pi} k_\pm (5 + 2k_\pm^2) (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm 2(2 + k_\pm^2) \exp(-k_\pm^2)) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Le problème de définition des systèmes (\mathcal{P}^\pm) par perte de réalisibilité des moments n'existe pas dans notre cas. En effet, l'espace des moments physiquement admissibles $\mathcal{A} = \{ \vec{\rho} \mid \exists f \geq 0 \text{ vérifiant } \vec{\rho} = \langle f \rangle \}$ engendrés par les fonctions de distribution positives coïncide avec l'espace des moments $\mathcal{D}(\vec{j}) = \{ \vec{\rho} = (Q_+, Q_-) \mid \exists \mathcal{K}_\pm \text{ vérifiant } \mathcal{K}_{1,\pm} \geq 0 \text{ et } Q_\pm = Q(\mathcal{K}_\pm) \}$ engendrés par le modèle aux demis moments. En effet, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\vec{j})$. Pour établir cette relation, il suffit de vérifier trivialement que $\mathcal{A} = \{ \vec{\rho} = (Q_+, Q_-) \mid Q_{1,\pm} \geq 0 \text{ et } Q_{1,\pm} Q_{3,\pm} \geq Q_{2,\pm}^2/2 \}$. Dans ce cas, si $\vec{\rho} \in \mathcal{A}$, comme la fonction

$$h_\pm(k_\pm) = \frac{Q_{1,\pm} Q_{3,\pm}}{Q_{2,\pm}^2} = \frac{\sqrt{\pi} (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) (\sqrt{\pi} (3 + 2k_\pm^2) (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm 2k_\pm \exp(-k_\pm^2))}{4 (\sqrt{\pi} k_\pm (1 \pm \text{erf}(k_\pm)) \pm \exp(-k_\pm^2))^2} \quad (12)$$

qui permet de déterminer k_\pm en fonction des demis moments est monotone et varie de 1/2 à l'infini, il existe toujours $k_\pm \in \mathbb{R}$ qui satisfait (12). En formant les quotients $Q_{3,\pm}/Q_{1,\pm}$ et $Q_{2,\pm}/Q_{1,\pm}$, il est alors aisé de trouver $C_\pm \geq 0$ et $a_\pm \in \mathbb{R}$ qui satisfont (9). On a donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\vec{j})$.

Ce calcul montre que l'inversion des relations (9) n'est pas analytique. En fait, seule l'inversion de (12) posant un problème, nous avons tabulé l'inverse de la fonction g_\pm qui varie de $[1/2, \infty[$ dans \mathbb{R} .

Une propriété importante de ce modèle est de redonner asymptotiquement la bonne limite diffusive proche de l'équilibre cinétique à savoir les équations de Navier–Stokes. En effet, si on procède à un développement asymptotique à l'ordre 1 de type Chapman–Enskog sur les systèmes (P^\pm) basé sur le temps de collision τ comme petit paramètre, ce modèle redonne les équations de Navier–Stokes.

Une autre propriété importante des systèmes (P^\pm) est que les valeurs propres des jacobiniennes sont toutes de même signe. Pour le montrer il suffit de considérer le quotient de Rayleigh exprimé dans les variables entropiques α (voir [6]). Cette propriété entraîne que le traitement des conditions aux limites va être très simple. Ainsi, pour le système (P^+) par exemple, les caractéristiques se déplacent de la gauche vers la droite, on va imposer Q_+ (Dirichlet) sur la frontière gauche du domaine de calcul et rien sur la frontière droite. De plus, l'approximation numérique des systèmes (P^\pm) va aussi être très simple, il suffit en effet de considérer des approximations complètement décentrées pour les dérivées en espace :

$$(Q_{i,\pm}^{n+1} - Q_{i,\pm}^n)/\Delta t \pm (F_{i,\pm}^\omega - F_{i\mp 1,\pm}^\omega)/\Delta x = (Q_\pm(\mathcal{K}_{i,\mathcal{M}}^\omega) - Q_{i,\pm}^\omega)/\tau, \quad (13)$$

où $\omega = n$ ou $\omega = n + 1$ suivant que l'on considère un schéma explicite ou implicite.

Pour tester notre méthode, on considère la cas classique d'un choc stationnaire plan dans un gaz d'argon. On peut définir l'épaisseur d'un choc par la densité, par exemple, par la longueur $L_\rho = (\rho_d - \rho_g)/\max_x(\partial\rho/\partial x)$ où ρ_d et ρ_g sont les densités en aval et en amont du choc. Il est bien connu que l'épaisseur du choc dépend du nombre de Mach amont. Pour un nombre de Mach croissant de 1 à 4, l'épaisseur du choc diminue elle atteint un maximum à Mach 4, puis elle croit quand la Mach augmente.

Nous montrons dans la Fig. 1 une comparaison de l'inverse de l'épaisseur du choc donnée par notre méthode sur un maillage de 100 points en espace par un schéma d'ordre 1 pour différents nombres de Mach, avec les données expérimentales obtenues par Alsmeyer [1]. Ces résultats sont comparés avec un calcul cinétique obtenu avec le code KISS (Kinetic Implicit Steady State) [8] qui résout les équations de Boltzmann BGK par une méthode implicite discrète en vitesses (DVM). On compare aussi à des résultats Navier–Stokes obtenus avec le code ARES du CESTA. On constate que notre méthode donne de très bon résultats à partir de Mach 2. Par comparaison, les équations de Navier–Stokes donnent de mauvais résultats pour Mach 2, avec une erreur de près de 50% à partir de Mach 4.

On peut aussi constater sur la Fig. 2 que notre méthode ne souffre pas du problème de l'introduction de discontinuité dans le profil de la solution comme les méthodes aux moments classiques [7]. Dans ce sens, notre solution se comporte plutôt comme la solution aux équations de Boltzmann.

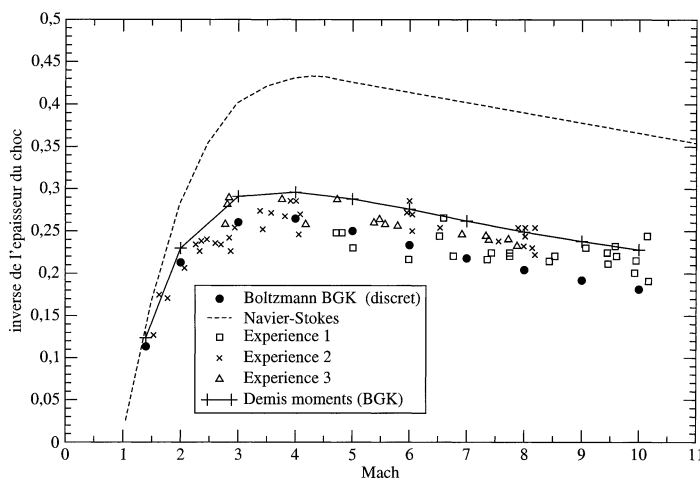


Figure 1. – Comparaison de l'épaisseur du choc obtenue par divers calculs comparés à l'expérience.

Figure 1. – Comparison of the thickness of the shock obtained from several calculations, compared with experiment.

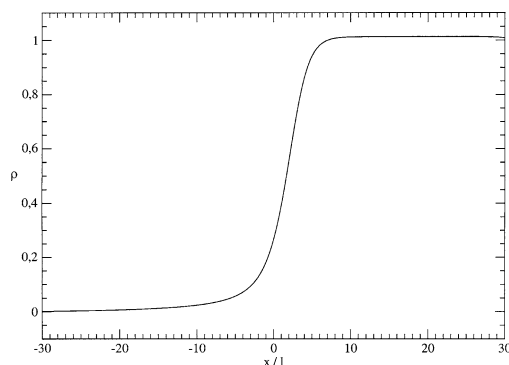


Figure 2. – Profil de densité adimensionné à Mach 20 (méthode aux demis moments).

Figure 2. – Profile of adimensioned density at Mach 20 using the half moment method.

4. Extension au cas multidimensionnel et conclusion

Nous avons introduit dans cette note une méthode aux moments robuste, précise et simple à mettre en œuvre. Elle est capable de restituer de fort déséquilibres cinétiques et possède de bonnes propriétés : le système (\mathcal{P}^\pm) est hyperbolique, il possède une entropie qui est localement dissipée et il ne dégénère pas pas perte de réalisibilité ($\mathcal{A} = \mathcal{D}(\vec{j})$). De plus le traitement des conditions aux limites ainsi que l’approximation numérique de ce système est relativement simple.

L’extension au cas multidimensionnel est directe si l’on considère une fermeture par des quarts de moments au lieu d’une fermeture par des demis moments. Pour introduire ces modèles nous introduisons un nouveau vecteur $\vec{m}(\vec{v}) = (\vec{m}_{+,+}(\vec{v}), \vec{m}_{+,-}(\vec{v}), \vec{m}_{-,+}(\vec{v}), \vec{m}_{-,-}(\vec{v}))$ défini sur les quatre quadrants de l’espace de vitesses.

Le choix le plus simple consiste à considérer une description maxwellienne par quadrant de l’espace des vitesses $\vec{m}_{\pm,\pm}(\vec{v}) = (1_1^\pm 1_2^\pm, v_1^\pm, v_2^\pm, (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) 1_1^\pm 1_2^\pm / 2)$. Ceci présente un inconvénient, l’inversion du problème (12) est remplacé par une inversion d’un système non linéaire à deux équations. Ceci peut être levé en considérant plus de degrés de libertés, en fait une température par direction : $\vec{m}_{\pm,\pm}(\vec{v}) = (1_1^\pm 1_2^\pm, v_1^\pm, v_2^\pm, v_1^2 1_1^\pm 1_2^\pm, v_2^2 1_1^\pm 1_2^\pm, v_3^2 1_1^\pm 1_2^\pm)$. Dans ce cas on est ramené à l’inversion de deux problèmes de type (12) par quadrant d’espace de vitesses. On peut bien sur aussi redécouper l’espace des vitesses sur d’autres critères comme l’énergie des particules $A \leq |\vec{v}|^2 \leq B$ comme dans les méthodes multigroupes en transfert radiatif.

L’étude exhaustive de ces extensions fera l’objet d’une prochaine publication, ainsi que l’extension de ce modèles à d’autres opérateurs de collisions comme l’opérateur de Fokker–Planck pour les particules chargées.

Références bibliographiques

- [1] H. Alsmeyer, Density profiles in argon and nitrogen measured by the absorption of an electron beam, *J. Fluid Mech.* 74 (3) (1976) 497–513.
- [2] P.J. Clause, M. Mareschal, Heat transfer in a gas between parallel plates: Moment methods and molecular dynamics, *Phys. Rev. A* 38 (1988) 4241–4252.
- [3] B. Dubroca, A. Klar, Half moment closure for radiative transfer equations, submitted to *J.C.P.*, 2002.
- [4] P. Charrier, B. Dubroca, J.L. Feugeas, L. Mieussens, Discrete-velocity models for kinetic nonequilibrium flows, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 326 (11) (1998) 1347–1352.
- [5] H. Grad, On kinetic theory of the rarefied gases, *Comm. Pure Appl. Math.* II (1949) 331–407.
- [6] D. Levermore, Moment closure hierarchies for kinetic theories, *J. Statist. Phys.* 83 (1996).
- [7] D. Levermore, W.J. Morokoff, The Gaussian closure for gas dynamic, *SIAM J. Appl. Math.* 59 (1) (1999) 72–96.
- [8] L. Mieussens, Discrete velocity models and numerical schemes for the Boltzmann-BGK equation in plane and axisymmetric geometries, *J. Comput. Phys.* 162 (2000).
- [9] W. Vincenti, C. Kruger, *Introduction to Physical Gas Dynamic*, Wiley, New York, 1965.