

Courants de type Liouville pour les applications holomorphes

Said Asserda ^a, M'hamed Kassi ^b

^a Rue 326, 51 Kénitra, Maroc

^b Département de mathématiques, Université Mohamed-V, BP 1014 Rabat, Maroc

Reçu le 18 juillet 2002 ; accepté le 12 septembre 2002

Note présentée par Jean-Pierre Demailly.

Résumé

On montre que tout courant positif fermé T , régularisable et à croissance faible dans une variété Kählerienne M est de Liouville relatif à la classe des applications holomorphes bornées sur le support de T et à valeurs dans une variété Kählerienne N de forme de Kähler exacte. On établit un théorème de type Casorati–Weierstrass pour le courant T . Aussi, on montre que si (M, ω) est Kählerienne complète de courbure de Ricci semi-positives à l'infini i.e. $\text{Ric}_\omega(x) \geq -\alpha(r(x))$ où $\alpha(t)$ décroît vers 0 à l'infini, alors M est de Liouville pourvu qu'il existe $p > 1$ tel que $\lambda_1(M) \geq p\alpha(0)$ et la fonction $\max(\alpha(r), r^{-2})$ est p -sommable à l'infini. *Pour citer cet article : S. Asserda, M. Kassi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 751–756.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Liouville type currents for holomorphic maps

Abstract

We show that every regularized positive closed current T with slow growth on a Kähler manifold M is a Liouville current with respect to the class of holomorphic maps bounded on the support of T with values on a Kähler manifold N whose Kähler form is exact. We establish a Casorati–Weierstrass type theorem for the current T . Also we show that if (M, ω) is a complete Kähler manifold with nonnegative Ricci curvature at infinity, i.e., $\text{Ric}_\omega(x) \geq -\alpha(r(x))$ where $\alpha(t)$ is nonnegative and decreases to 0 at infinity, then M is a Liouville manifold provided that $\lambda_1(M) \geq p\alpha(0)$ and the function $\max(\alpha(r), r^{-2})$ is p -summable at infinity for some $p > 1$. *To cite this article: S. Asserda, M. Kassi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 751–756.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let (M, ω_M) be a Kähler m -dimensional manifold and T be a closed positive current on M . Let (N, ω_N) be a Hermitian m -dimensional manifold and $\mathcal{O}(M, N)$ be the space of holomorphic maps from M to N . The current T is a Liouville current with respect to $\mathcal{O}(M, N)$ if every holomorphic map $f \in \mathcal{O}(M, N)$ such that $f(\text{supp } T) \subseteq N$, the current $f^*(\omega_N) \wedge T$ is trivial. In [7], it is proved that if N is Kähler and does not support any positive closed current with compact support then every holomorphic mapping $f : \mathbb{C} \rightarrow N$

Adresses e-mail : sasserda@hotmail.com (S. Asserda); Mha73@caramail.com (M. Kassi).

such that $f(\mathbb{C}) \in N$ is a constant map, i.e., $f^*(\omega_N) = 0$. The purpose of this Note is to generalize this result to positive closed currents. Let $\mathcal{F} := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \int_\delta^{+\infty} \frac{dr}{g(r)} = \infty\}$.

THEOREM 1. – *Let (M, ω_M) be a m -dimensional Kähler manifold and T be a regularized positive closed current of bidimension (p, p) on M . Let $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ be a nonbounded exhaustion function of class C^2 . Let $g \in \mathcal{F}$ such that*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{\phi \leq r} dd^c \phi \wedge T \wedge \omega_M^{p-1}}{g(r)} < +\infty.$$

Let (N, ω_N) be a $n \geq 2$ -dimensional Hermitian manifold and $f : M \rightarrow N$ be a holomorphic mapping such that $f(\text{supp } T) \in N$.

- (i) *If the current $f^*(\omega_N) \wedge T$ is not trivial then there exist a nontrivial positive closed current S of bidimension $(1, 1)$ on N such that $\text{supp } S \subset \overline{f(\text{supp } T)}$. In particular if ω_N is d -exact in a neighborhood of $\overline{f(\text{supp } T)}$ then $f^*(\omega_N) \wedge T = 0$.*
- (ii) *If $f(\text{supp } T)$ has a finite number of connected components and if there exist a nontrivial positive closed current S of bidimension $(1, 1)$ on N such that $\text{supp } S \subset \overline{f(\text{supp } T)}$ then $f^*(\omega_N)$ is nontrivial on $\text{supp } T$.*
- (iii) *If N is a projective manifold equipped with a very ample line bundle L such that the set $E := \{\sigma \in \mathbf{P}(H^0(N, L)) : f(\text{supp } T) \cap \text{supp }(\sigma) = \emptyset\}$ has positive measure then $f^*(\omega_N) \wedge T = 0$. Here $H^0(N, L)$ denote the space of holomorphic sections of L and $\mathbf{P}(H^0(N, L))$ is the projectivized space.*

It follows from (i) that every projective positive closed current on \mathbb{C}^n is a Liouville current with respect to $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. This fact was established by Blel and Raby [2] (see also Mimouni [9]). Also (ii) generalize to positive closed currents a Casorati–Weierstrass type theorem of Takegoshi [10,11].

It is well known that every complete Kähler manifold with nonnegative Ricci curvature is a Liouville manifold [14]. In [12], Wu proved that every bounded holomorphic map from M to a Hermitian manifold N such that $\overline{f(M)}$ support a strictly psh function is a constant map. Other Liouville properties were studied in [8]. Our purpose is to establish the Liouville property for complete Kähler manifolds with nonnegative Ricci curvature at infinity.

DEFINITION. – Let (M, g) be a complete Riemannian manifold. The Ricci curvature of g is nonnegative at infinity if there exists a nonincreasing function $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $\alpha \rightarrow 0$ at infinity and $\text{Ric}_g(x) \geq -\alpha(r(x))$ where $r(x) = d_g(x, x_0)$.

We denote by $\lambda_1(M)$ the lower bound for the spectrum of the Laplacian. For $x \in M$ and $r(x) \geq a > 0$, let $R(x) := \max(\alpha(r(x)), r^{-2}(x))$.

THEOREM 2. – *Let (M, ω_M) be a complete Kähler manifold with nonnegative Ricci curvature at infinity. Let (N, ω_N) be a Hermitian manifold whose holomorphic bisectional curvature is bounded from above. Let ϕ be a C^2 bounded strictly psh function such that $\|d\phi\| \leq 1$ and $i\partial\bar{\partial}_p \phi \geq \varepsilon \omega_N$. If there exist $p > 1$ and $a > 0$ such that $\lambda_1(M) \geq p\alpha(0)$ and $R \in L^p(M \setminus B(x_0, a))$, then every holomorphic map from M to N is constant.*

Remarks. –

- 1. If M has finite volume, without any curvature assumption, then $\phi \circ f \in L^2(M)$. By Yau’s theorem [15] $\phi \circ f$ is constant. Hence f is a constant map.
- 2. If $\text{Ric}_{\omega_M} \geq 0$, in this case $\lambda_1(M) = 0$, we know that $\text{Vol}(B(x_0, d)) \leq C(x_0)d^{2m-1}$ [1]. It follows that $R \in L^p$ if $p \gg 1$.
- 3. If instead of ϕ we take $e^{t\phi}$, then for every $B \leq 0$ and $t \gg 1$ the holomorphic bisectional curvature of $\tilde{\omega}_N := e^{t\phi} \omega_N$ has the upper bound B [12]. It follows that the energies $\text{trace}_{\omega_M} f^*(\omega_N)$ and $\text{trace}_{\omega_M} f^*(\tilde{\omega}_N)$ are comparable. Without loss of generality, we can suppose that the holomorphic bisectional curvature of N is nonpositive.

For harmonic maps between Riemannian manifolds, we have

PROPOSITION. – *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature at infinity. Let (N, h) be a Riemannian manifold whose sectional curvature is bounded from above. Let ϕ be a C^2 bounded strictly convex function such that $\|d\phi\| \leq 1$ and $d^2\phi \geq \varepsilon h$. If there exist $p > 1$ and $a > 0$ such that $\lambda_1(M) \geq p\alpha(0)$ and $R \in L^p(M \setminus B(x_0, a))$, then every harmonic map from M to N is constant.*

1. Introduction et énoncé des résultats

Soient (M, ω_M) une variété Kählerienne de dimension m et T un courant positif fermé dans M . Soient (N, ω_N) une variété hermitienne de dimension n et $\mathcal{O}(M, N)$ l'espace des applications holomorphes de M dans N . On dit que T est de Liouville relatif à $\mathcal{O}(M, N)$ si toute application holomorphe f de M dans N telle que $f(\text{supp } T) \subseteq N$, le courant $f^*(\omega_N) \wedge T$ est trivial. Dans [7], Guedj a montré que si N est une variété Kählerienne qui ne supporte pas de courant positif fermé à support compact, alors toute application holomorphe de \mathbb{C} dans N telle que $f(\mathbb{C}) \subseteq N$ est constante i.e. $f^*(\omega_N) = 0$. On se propose de généraliser ce résultat aux courants positifs fermés. On note $\mathcal{F} := \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \int_\delta^{+\infty} \frac{dr}{g(r)} = \infty\}$.

THÉORÈME 1. – *Soient (M, ω_M) une variété Kählerienne de dimension m et T un courant positif fermé de bidimension (p, p) régularisable dans M . Soit $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , exhaustive et non bornée. Soit $g \in \mathcal{F}$ tel que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{\phi \leq r} dd^c \phi \wedge T \wedge \omega_M^{p-1}}{g(r)} < +\infty.$$

Soient (N, ω_N) une variété hermitienne de dimension $n \geq 2$ et $f : M \rightarrow N$ une application holomorphe telle que $f(\text{supp } T) \subseteq N$.

- (i) *Si le courant $f^*(\omega_N) \wedge T$ est non trivial alors il existe un courant positif fermé S de bidimension $(1, 1)$ non trivial sur N et à support dans $\overline{f(\text{supp } T)}$. En particulier si ω_N est d-exacte au voisinage de $\overline{f(\text{supp } T)}$ alors $f^*(\omega_N) \wedge T = 0$.*
- (ii) *Si $f(\text{supp } T)$ admet un nombre fini de composantes connexes et s'il existe un courant positif fermé S de bidimension $(1, 1)$ non trivial sur N et à support dans $\overline{f(\text{supp } T)}$ alors $f^*(\omega_N)$ est non trivial sur $\text{supp } T$.*
- (iii) *Si N est une variété projective munie d'un fibré très ample L tels que l'ensemble $E := \{\sigma \in \mathbf{P}(H^0(N, L)) : f(\text{supp } T) \cap \text{supp}(\sigma) = \emptyset\}$ est de mesure non nulle, alors $f^*(\omega_N) \wedge T = 0$; où $H^0(N, L)$ est l'espace des sections holomorphes de L et $\mathbf{P}(H^0(N, L))$ l'espace projectif associé.*

L'assertion (i) entraîne que tout courant projective sur \mathbb{C}^n est de Liouville relatif à $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Ce résultat a été établi par Blel et Raby [2] (voir aussi Mimouni [9]). L'assertion (iii) généralise au courants positifs fermés un théorème de Casorati–Weierstarass établi par Takegoshi [10,11].

On sait que toute variété Kählerienne complète de courbure de Ricci semi-positive est de Liouville [14]. Dans [12], Wu a montré que toute application holomorphe bornée de M dans N tel que $\overline{f(M)}$ supporte une fonction strictement Psh est constante. D'autres propriétés de Liouville ont été établies par Li et Yau [8]. On se propose d'étudier la propriété de Liouville pour les variétés Kähleriennes complètes de courbure de Ricci semi-positive à l'infini.

DÉFINITION. – *Une variété Riemannienne complète (M, g) est dite de courbure de Ricci semi-positive à l'infini s'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante qui tend vers 0 à l'infini telle que $\text{Ric}_g(x) \geq \alpha(r(x))$ où $r(x) = d_g(x, x_0)$.*

On désigne par $\lambda_1(M)$ la borne inférieure du spectre du laplacien de M . Pour $x \in M$ et $r(x) \geq a > 0$, on pose $R(x) := \max(\alpha(r(x)), r^{-2}(x))$.

THÉORÈME 2. – Soit (M, ω_M) une variété Kählerienne complète de courbure de Ricci semi-positive à l’infini. Soit (N, ω_N) une variété hermitienne de courbure bissectionnelle majorée. Soit $\phi : N \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction strictement Psh de classe C^2 bornée telle que $\|d\phi\| \leq 1$ et $i\partial\bar{\partial}\phi \geq \varepsilon\omega_N$.

Si il existe $p > 1$ et $a > 0$ tels que $\lambda_1(M) \geq p\alpha(0)$ et $R \in L^p(M \setminus B(x_0, a))$, alors toute application holomorphe de M dans N est constante.

Remarques. –

1. Si M est de volume fini, sans aucune hypothèse de courbure, alors $\phi \circ f \in L^2(M)$. D’après un résultat de Yau [15], elle est constante. Par suite f est constante.

2. Si $\text{Ric}_{\omega_M} \geq 0$ alors $\lambda_1(M) = 0$. On sait que $\text{Vol}(B(x_0, d)) \leq C_{x_0}d^{2m-1}$ [1]. Donc $R \in L^p$ pour $p \gg 1$. On en déduit le résultat de Wu [12].

3. Quitte à remplacer ϕ par $e^{t\phi}$, alors pour tout $B \leq 0$ et pour $t \gg 1$ la métrique $\tilde{\omega}_N := e^{t\phi}\omega_N$ est de courbure bissectionnelle majorée par B [12]. Donc les énergies $\text{trace}_{\omega_M} f^*(\omega_N)$ et $\text{trace}_{\omega_M} f^*(\tilde{\omega}_N)$ sont comparables sur M . On peut donc supposer que la courbure bissectionnelle de N est semi-négative.

Pour les applications harmoniques entre variétés Riemanniennes, on a

PROPOSITION. – Soit (M, g) une variété Riemannienne complète de courbure de Ricci semi-positive à l’infini. Soit (N, h) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle majorée. Soit $\phi : N \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction strictement convexe de classe C^2 bornée telle que $\|d\phi\| \leq 1$ et $d^2\phi \geq \varepsilon h$. Si il existe $p > 1$ et $a > 0$ tels que $\lambda_1(M) \geq p\alpha(0)$ et $R \in L^p(M \setminus B(x_0, a))$, alors toute application harmonique de M dans N est constante.

2. Preuve du Théorème 1

(i) Soit r_0 tel que $f^*(\omega_N) \wedge T$ est non trivial sur $\{\phi < r\}$ pour $r \geq r_0$. On définit le courant S_r de bidimension $(1, 1)$ sur N par

$$\langle S_r, \theta \rangle := \frac{\int_{\phi < r} f^*(\theta) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1}}{\int_{\phi < r} f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1}}.$$

Alors S_r est positive, à support dans $\overline{f(\text{supp} T)}$ et $\|S_r\| = 1$. Le courant S cherché sera une limite faible des (S_r) . Pour cela, on a besoin des lemmes suivants.

LEMME 1. – Pour presque toute valeur régulière de ϕ , on a

$$|\langle S_r, d\theta \rangle| \leq C \int_{\phi \leq r} dd^c \phi \wedge T \wedge \omega_M^{p-1} \frac{\int_{\phi=r} *(f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1})}{(\int_{\phi < r} f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1})^2}$$

pour toute forme test réelle θ sur N , où $*(f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1})$ est la trace de la mesure $f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1}$ sur $\{\phi = r\}$ et C est une constante qui ne dépend pas de r .

LEMME 2. – Il existe une suite de valeurs régulières $(r_k) \rightarrow +\infty$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\phi \leq r_k} dd^c \phi \wedge T \wedge \omega_M^{p-1} \frac{(\int_{\phi=r_k} *(f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1}))}{(\int_{\phi < r_k} f^*(\omega_N) \wedge T \wedge \omega_M^{p-1})^2} = 0.$$

Soit $r_j \rightarrow +\infty$ une suite qui vérifie les propriétés des Lemmes 1 et 2. Alors la suite des courants (S_{r_j}) est de masse localement fini, elle admet donc une limite faible S qui est un courant positif fermé de bidimension $(1, 1)$, à support dans $\overline{f(\text{supp} T)}$ et non trivial car $\|S\| = 1$.

(ii) Soit S un courant positif fermé de bidimension $(1, 1)$, non trivial et à support dans $\overline{f(\text{supp} T)}$. Si $f^*(\omega_N) = 0$ sur $\text{supp} T$, alors $u := \text{trace}_{\omega_M} f^*(\omega_N)$ est C^∞ et nulle sur $\text{supp} T$. D’après le théorème de

Sard [5], pour tout entier k on a $\mathcal{H}^{2n/k}(f(\text{supp } T)) = 0$ où \mathcal{H}^α est la mesure de Hausdorff relative à la métrique ω_N . En particulier $\mathcal{H}^1(f(\text{supp } T)) = 0$. Si les C_j , $j = 1, \dots, p$ sont les composante connexes de $f(\text{supp } T)$, d'après [5] on a $0 = \mathcal{H}^1(C_j) \geq \text{diam}(C_j)$. D'où $f(\text{supp } T)$ est réduit à nombre fini de points et par suite $S = 0$ d'après le théorème de support [5], contradiction.

(iii) D'après [10], on peut supposer que $N = \mathbf{P}_n$ et $L = \mathcal{O}(1)$ est le fibré des hyperplans de \mathbf{P}^n . Soit \mathbf{P}_n^* le dual de \mathbf{P}_n . Soit $\sigma = (\sigma_0 : \sigma_1 : \dots : \sigma_n) \in \mathbf{P}_n$ (resp. $\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n) \in \mathbf{P}_n^*$) les coordonnées homogènes de \mathbf{P}_n (resp. \mathbf{P}_n^*). On note $\langle \sigma, \xi \rangle = \sum_{i=0}^n \sigma_i \xi_i$ et $\|\sigma\| = \sum_{i=0}^n |\sigma_i|^2$. Soit K le potentiel sur $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n^*$ défini par $K(\sigma, \xi) := \log \frac{\|\sigma\| \|\xi\|}{|\langle \sigma, \xi \rangle|}$. Si ω_{FS} est la métrique de Fubini–Study sur \mathbf{P}_n , on a : $\omega_{FS} = 2dd^c K(\sigma, \xi)$ sur $\mathbf{P}_n \setminus \text{supp}(\xi)$. Soit $E \subset \mathbf{P}_n^*$ un ensemble de mesure non nulle tel que $f(\text{supp } T) \cap \text{supp}(\xi) = \emptyset$ pour tout $\xi \in E$. Il existe $\xi \in E$ tel que $(f(\text{supp } T) \setminus \overline{f(\text{supp } T)}) \cap \text{supp}(\xi) = \emptyset$. Sinon E sera contenu dans l'ensemble des hyperplans $\{H^a, a \in \overline{f(\text{supp } T)} \setminus f(\text{supp } T)\}$ qui est de mesure nulle dans \mathbf{P}_n^* . Donc ω_{FS} est d -exacte au voisinage de $\overline{f(\text{supp } T)}$. D'après le (i) : $f^*(\omega_{FS}) \wedge T = 0$.

3. Preuve du Théorème 2 (esquisse de la démonstration)

Pour $z \in M$, on considère la boule $B(z, 2r(z))$ où $r(z) = d_{\omega_M}(z, x_0)$ et $x_0 \in M$ fixé. Alors pour tout $x \in B(z, 2r(z))$ on a $\text{Ric}_{\omega_M}(x) \geq -\alpha(r(z))$. Soit $c > 0$ tel que $c - \phi(f(x)) \geq 1$ pour tout $x \in M$. Suivant Cheng [4], on considère la fonction h définie sur $B(z, 2r(z))$ par

$$h(x) := \frac{(4r(z)^2 - d^2(x, z))^2 \|df(x)\|^2}{(c - \phi(f(x)))^2}.$$

Puisque $h = 0$ sur $\partial B(z, 2r(z))$, alors h atteint sa borne supérieure en un point $y \in B(z, 2r(z))$. En utilisant un argument de Calabi [3], on peut supposer que $d(x, z)$ est C^2 au voisinage de y . D'après le principe de maximum on a :

$$d \log h(y) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \log h(y) \leq 0. \tag{1}$$

Le théorème de comparaison du laplacien [6] entraîne $\Delta d^2(x, z) \leq C_M(1 + r(z)\alpha(r(z)))$ pour tout $x \in B(z, 2r(z))$. La formule de Bochner–Weitzenböck–Lichnerowicz (voir par exemple [13]) entraîne que :

$$\Delta \|df(x)\|^2 \geq \frac{1}{2} \frac{\|d\|df(x)\|^2\|^2}{\|df(x)\|^2} - 2\alpha(r(z))\|df(x)\|^2 \quad \text{pour tout } x \in B(z, 2r(z)). \tag{2}$$

Puisque $i\partial\bar{\partial}\phi \geq \varepsilon\omega_N : \Delta(\phi \circ f) \geq \varepsilon\|df\|^2$. En combinant cette dernière inégalité avec (1) et (2), on en déduit que

$$\|df\|^2(z) \leq CR(z) \quad \text{si } r(z) \gg 1. \tag{3}$$

Si $g = \|df\|^p$, d'après (2) pour tout $p \geq 1$ et $x \in M$, on a

$$\Delta g \geq -p\alpha(0)g + \left(\frac{p-1}{p}\right) \frac{\|dg\|^2}{g}. \tag{4}$$

Pour tout $\psi \in C_0^\infty(M)$, on a

$$\int_M \|d(\psi g)\|^2 dV = \int_M \|\psi\|^2 g^2 dV + 2 \int_M \psi g \langle d\psi, dg \rangle dV + \int_M \psi^2 \|dg\|^2 dV.$$

Mais

$$\begin{aligned} 2 \int_M \psi g \langle d\psi, dg \rangle dV &= \frac{1}{2} \int_M \langle d\psi^2, dg^2 \rangle dV \\ &= - \int_M \psi^2 g \Delta g dV - \int_M \psi^2 \|dg\|^2 dV \end{aligned}$$

$$= p\alpha(0) \int_M \psi^2 g^2 dV - \int_M \psi^2 \|dg\|^2 dV - \int_M \psi^2 g(\Delta g + p\alpha(0)g) dV.$$

D'après la propriété variationnelle de $\lambda_1(M)$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) \int_M \psi^2 g^2 dV &\leq \int_M \|d(\psi g)\|^2 dV \\ &= p\alpha(0) \int_M \psi^2 g^2 dV + \int_M g^2 \|d\psi\|^2 dV - \int_M \psi^2 g(\Delta g + p\alpha(0)g) dV \end{aligned}$$

ceci entraîne

$$\int_M \psi^2 g(\Delta g + p\alpha(0)g) dV \leq (p\alpha(0) - \lambda_1(M)) \int_M \psi^2 g^2 dV + \int_M \|d\psi\|^2 g^2 dV.$$

Soit $\psi \in C_0^\infty(M)$ telle que $\psi = 1$ sur $B_d = B(x_0, d)$ et $\|d\psi\|^2 \leq Cd^{-2}$. L'inégalité précédente entraîne

$$\int_{B(x_0, d)} g(\Delta g + p\alpha(0)g) \leq Cd^{-2} \int_{M \setminus B(x_0, d)} R^p dV.$$

En tendant d vers l'infini, on a ou bien $g = 0$ ou bien g satisfait à $\Delta g + p\alpha(0)g = 0$. Puisque $p > 1$, l'inégalité (4) entraîne que g est constante et d'après (4) f est constante.

Remerciements. Nous remercions Jean-Pierre Demailly pour les suggestions qui ont contribué à améliorer ce travail.

Références bibliographiques

- [1] R. Bishop, R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.
- [2] M. Blel, G. Raby, *Courants algébriques et courants de Liouville*, Prépublication de l'université de Poitiers.
- [3] E. Calabi, An extension of E. Hopf's maximum principle with application to Riemannian geometry, *Duke Math. J.* 25 (1958) 45–56.
- [4] S.Y. Cheng, Liouville theorems for harmonic maps, *Proc. Sympos. Pure Math.* 36 (1980) 147–151.
- [5] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [6] R.E. Greene, H. Wu, *Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole*, in: *Lecture Notes in Math.*, Vol. 699, Springer-Verlag, 1979.
- [7] V. Guedj, *Approximation of currents on complex manifolds*, Prépublication de Paris Sud, 1997.
- [8] P. Li, S.T. Yau, Curvature and holomorphic mappings of complete Kähler manifolds, *Composito Math.* 73 (1990) 125–144.
- [9] S.K. Mimouni, Théorèmes de types Liouville pour les courants positifs fermés, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 311 (2000) 611–616.
- [10] K. Takegoshi, Energy estimates and Liouville theorems for harmonic maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 23 (1990) 563–592.
- [11] K. Takegoshi, A Liouville theorem on an analytic space, *J. Math. Soc. Japan* 45 (2) (1993) 301–311.
- [12] H. Wu, Liouville theorems, in: *Proc. Sympos. Pure Math.*, American Mathematical Society, 1984.
- [13] H. Wu, *The Bochner Technique in Differential Geometry*, Math. Rep., Harwood Academic, London.
- [14] S.T. Yau, A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.* 100 (1978) 197–203.
- [15] S.T. Yau, Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, *Indiana Univ. Math. J.* 25 (1976) 659–670.