C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 927–930

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Hypersurfaces d'un fibré vectoriel Riemannien à courbure de Gauss prescrite

Abdellah Hanani

Université des sciences et technologies de Lille, UFR de mathématiques pures et appliquées, bât. M2, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 11 septembre 2002 ; accepté après révision le 14 octobre 2002

Note présentée par Thierry Aubin.

Résumé Soient M une variété Riemannienne compacte, E un fibré vectoriel Riemannien sur M et Σ le sous-fibré unitaire de E. On détermine des plongements de Σ dans E dont on prescrit des courbures de Gauss de divers types. ***Pour citer cet article : A. Hanani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 927–930.***

Hypersurfaces of a Riemannian vector bundle with prescribed Gaussian curvature

Abstract Let M be a compact Riemannian manifold, E a Riemannian vector bundle on M and Σ the sphere subbundle of E. We look for embeddings of Σ into E admitting prescribed Gaussian curvatures of various types. ***To cite this article: A. Hanani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 927–930.***

1. Notations

Dans cette Note, on désigne par (M,g) une variété Riemannienne compacte sans bord, de dimension $n \geqslant 1$, et par ∇ la connexion de Levi-Civita de (M,g). Soient $(E,\tilde{g})$ un fibré vectoriel Riemannien sur M de rang $m \geqslant 2$, Σ le fibré unitaire correspondant, E_* le fibré E privé de la section nulle, et $\widetilde{\nabla}$ une connexion métrique sur $(E,\tilde{g})$.

Soient U un ouvert de M muni de coordonnées $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de ∇ : $\nabla_{\varepsilon_i}\varepsilon_j = \Gamma_{ij}^k \varepsilon_k$. Soit $(s_\alpha)_{n+1\leqslant\alpha\leqslant n+m}$ un repère de sections de E au-dessus de U. π désignant la projection de E sur M, si $\xi \in \pi^{-1}(U)$ et $x = \pi(\xi)$, on écrit $\xi = y^\alpha s_\alpha(x)$; $(x^i, y^\alpha)_{i,\alpha}$ est alors un système de coordonnées sur $\pi^{-1}(U)$. Notons $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ les symboles de Christoffel de $\widetilde{\nabla}$ définis par $\widetilde{\nabla}_{\varepsilon_i} s_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta$. Le relèvement horizontal e_i de ε_i est donné par $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - y^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}$. Si $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $\{e_i, e_\alpha\}_{i,\alpha}$ est un repère mobile tangent à $\pi^{-1}(U)$. On définit sur E une métrique Riemannienne G en posant

$$G(e_i,e_j) = g(\varepsilon_i,\varepsilon_j), \quad G(e_\alpha,e_\beta) = \tilde{g}(e_\alpha,e_\beta), \quad G(e_i,e_\alpha) = 0,$$

Adresse e-mail : hanani@agat.univ-lille1.fr (A. Hanani).

S1631-073X(02)02588-8/FLA

où on identifie tout vecteur vertical à un point de E. Cette définition précise la dépendance de G en $\widetilde{\nabla}$.

Sur la variété E, on dispose alors de la connexion D de Sasaki [7] dans laquelle, pour des raisons techniques, sont effectués les calculs. On a

$$D_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad D_{e_i} e_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta e_\beta, \quad D_{e_\alpha} e_i = D_{e_\alpha} e_\beta = 0.$$

D est compatible avec G ; sa torsion est non nulle et dépend de la courbure de $\widetilde{\nabla}$, cf. [7].

Une hypersurface de E_* est dite convexe si sa seconde forme fondamentale est définie.

Enfin, μ_a étant égal à 0 ou 1 selon que la direction a est verticale ou horizontale, si $u \in \mathrm{C}^\infty(E_*)$, on note $\widetilde{D}_a u = \mathrm{e}^{\mu_a u} D_a u$, $|D^v u|^2 = D_\alpha u D^\alpha u$, $|\widetilde{D}u|^2 = \widetilde{D}_a u \widetilde{D}^a u$, $\widetilde{D}_{ab} u = \mathrm{e}^{(\mu_a+\mu_b)u} D_{ab} u$ et

$$\mathcal{N}_1(u) = \det\bigl[\bigl(\delta_i^j + D_i u D^j u - D_i^j u\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\bigr],$$
$$\mathcal{N}_2(u) = \det\bigl[\bigl(\delta_\alpha^\beta + D_\alpha u D^\beta u - D_\alpha^\beta u\bigr)_{n+1\leqslant \alpha,\beta\leqslant n+m-1}\bigr].$$

2. Problème de la courbure de Gauss verticale prescrite

Soit $\mathcal{Y}$ un plongement radial de Σ dans E_*, i.e. une application de Σ dans E_* du type $\xi \mapsto \mathrm{e}^{u(\xi)}\xi$, où $u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ est une fonction inconnue qu'on prolonge à E_* en la maintenant radialement constante. On identifie $\mathcal{Y}$ et son image $\mathcal{Y}(\Sigma) \subset E_*$. Si $x \in M$ et si $\xi \in \mathcal{Y}_x = E_x \cap \mathcal{Y}$, la courbure de Gauss verticale de $\mathcal{Y}$ au point ξ est la courbure de Gauss en ξ de la fibre $\mathcal{Y}_x$ considérée comme hypersurface de E_x. Il s'agit de déterminer un plongement $\mathcal{Y}$ de Σ dans E_* admettant une courbure de Gauss verticale prescrite égale à K, fonction C^∞ donnée sur E_*. Ceci revient à résoudre sur Σ l'équation du type de Monge–Ampère dégénérée suivante :

$$\mathcal{N}_2(u) = \bigl(1 + \bigl|D^v u\bigr|^2\bigr)^{(m+1)/2} \mathrm{e}^{(m-1)u} K\bigl(\mathrm{e}^u \xi\bigr). \tag{1}$$

Dans le cadre euclidien, i.e. quand M est réduite à un point, Oliker [6] a résolu la question sous la condition qu'il existe deux réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 \leqslant 1 \leqslant r_2$ et

$$K(\xi) > \|\xi\|^{(1-m)} \quad \text{si } \|\xi\| < r_1, \qquad K(\xi) < \|\xi\|^{(1-m)} \quad \text{si } \|\xi\| > r_2 \tag{2}$$

jointe à l'hypothèse de monotonicité

$$\frac{\partial[\rho^{(m-1)} K(\rho\xi)]}{\partial\rho} \leqslant 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \Sigma. \tag{3}$$

Ces conditions ont été simplifiées dans Delanoë [2]. Dans [1], Caffarelli, Nirenberg et Spruck ont étudié des hypersurfaces de $\mathbb{R}^m$ dont ils prescrivent certaines relations entre les courbures principales.

Dans le cadre des fibrés envisagés ici, des méthodes différentes de celles des auteurs précités s'imposent. En effet, dans l'équation (1) n'interviennent que les dérivées covariantes verticales de u. Ceci complique radicalement l'obtention des estimées a priori. Celles-ci ne sont pas requises pour prouver notre premier résultat. Quant au second, il s'agit d'un résultat d'existence crucial pour traiter le cas général.

THÉORÈME 1. – *Soit $K \in \mathrm{C}^\infty(E_*)$ une fonction > 0 constante sur chaque fibre de E_*. Il existe alors un graphe radial $\mathcal{Y}$ à courbure de Gauss verticale égale à K. Le graphe $\mathcal{Y}$ est convexe si et seulement si K est constante.*

THÉORÈME 2. – *Soient* $f \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ *une fonction partout strictement positive et* λ *un réel* > 0. *Il existe une unique solution* $u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ *des équations suivantes* :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1(u) = 1, \\ \mathcal{N}_2(u) = \mathrm{e}^{-\lambda u} f(\xi)\big(1 + D_\alpha u D^\alpha u\big)^{(m+1)/2} \end{cases} \tag{4}$$

telle que les matrices $(G_{\alpha\beta} + D_\alpha u D_\beta u - D_{\alpha\beta} u)_{n+1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant n+m-1}$ *et* $(G'_{ij} = G_{ij} + D_i u D_j u - D_{ij} u)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *soient définies positives ; une telle solution est dite admissible. Si le gradient horizontal de* f *est identiquement nul, il en est de même de celui de* u.

Démonstration. – Pour prouver l'unicité, l'admissibilité de la solution et la nullité de la composante horizontale de son gradient dans le cas où la composante horizontale du gradient de f est nulle, on applique le principe du maximum. Pour établir l'existence, on utilise la méthode de continuité dans le cadre fonctionnel C^∞ [3]. On note Θ l'hypersurface $\{u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma) \mid \mathcal{N}_1(u) = 1\}$ et, si $u \in \Theta$,

$$T_u(\Theta) = \left\{ w \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma) \;\Big|\; \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} G'^{ij}(2D_i u D_j w - D_{ij} w) = 0 \right\}.$$

Pour $t \in [0,1]$, on considère la famille d'équations

$$\mathcal{N}_2(u) = \mathrm{e}^{-\lambda u}\Big[f(\xi)\big(1 + |D^v u|^2\big)^{(m+1)/2}\Big]^t. \tag{$4-t$}$$

Remarquons que 0 est solution de $(4-0)$ et donc l'ensemble T des $t \in [0,1]$ pour lesquels l'équation $(4-t)$ admet une solution dans Θ est non vide. Ensuite, on considère la fonctionnelle $\Gamma : \Theta \times [0,1] \to \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ définie par

$$\Gamma(u,t) = \log\big[\mathcal{N}_2(u)\big] + \lambda u - t \log\Big[f(\xi)\big(1 + |D^v u|^2\big)^{(m+1)/2}\Big].$$

Γ est C^1 et on montre, en usant du théorème de point fixe de Nagumo [5], que sa différentielle par rapport à $u \in \Theta$, opérateur linéaire de $T_u(\Theta)$ dans $\mathrm{C}^\infty(\Sigma)$, est inversible. Il découle alors du théorème des fonctions implicites de Nash et Moser [4] que T est un ouvert de $[0,1]$. On prouve ensuite que T est fermé en établissant, pour tout $k \geqslant 0$, une estimée C^k des solutions éventuelles de $(4-t)$, indépendante de t. L'estimée C^0 se déduit du principe du maximum ; les autres estimées sont obtenues par récurrence en appliquant le principe du maximum à des fonctionnelles qui dépendent d'une norme des dérivées d'ordre k qu'on cherche à majorer et de quantités déjà estimées.

THÉORÈME 3. – *Soit* $K \in \mathrm{C}^\infty(E_*)$ *une fonction* > 0 *vérifiant l'hypothèse de croissance* (2). *Il existe alors un graphe radial* $\mathcal{Y}$ *sur* Σ, *de classe* C^∞, *dont la courbure de Gauss verticale est donnée par* K *et tel que* $r_1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r_2$ *pour tout* $\xi \in \mathcal{Y}$.

Démonstration. – Pour $t \in [0,1]$ et $w \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$, on pose $H(t,w) = u_t$, où $u_t \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ est l'unique solution admissible de

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1(u) = 1, \\ \mathcal{N}_2(u) = \mathrm{e}^{-u}\big[\mathrm{e}^{mw} K\big(\mathrm{e}^{w}\xi\big)\big]^t \big(1 + |D^v u|^2\big)^{(m+1)/2}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B}$ une partie bornée de $\mathrm{C}^\infty(\Sigma)$. Le Théorème 2 implique l'existence de u_t ainsi que celle d'une suite de réels positifs C_k tels que $\|u_t\|_{\mathrm{C}^k(\Sigma)} \leqslant C_k$ quel que soit $(t,w) \in [0,1] \times \mathcal{B}$. Il en découle que

H est compact. D'autre part, du fait que $H(0,\cdot)=0$, l'existence d'un point fixe de $H(1,\cdot)$, solution de l'équation (1), revient d'après le théorème de Nagumo [5], à montrer que $\{u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma) : H(t,u)=u$, pour un $t \in [0,1]\}$ est borné dans $\mathrm{C}^\infty(\Sigma)$. L'hypothèse (2) donne l'estimée C^0. Les estimées d'ordre supérieur sont obtenues en opérant comme au Théorème 2.

3. Courbure de Gauss prescrite et convexité

Soit $u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ une fonction inconnue qu'on prolonge à E_* en la maintenant radialement constante. La courbure de Gauss du graphe radial $\mathcal{Y} : \xi \in \Sigma \mapsto \mathrm{e}^{u(\xi)}\xi$ est donnée par

$$\mathcal{G}\big[\mathcal{Y}(\xi)\big] = \mathrm{e}^{(1-n-m)u}\big(1+|\widetilde{D}u|^2\big)^{-(n+m+1)/2}\det\big[(1-\mu_a)\delta_a^b + (1-\mu_a-\mu_b)\widetilde{D}_a u \widetilde{D}^b u - \widetilde{D}_a^b u\big].$$

La solution donnée au Théorème 3 n'est pas forcément convexe. A cet égard, on a les résultats suivants. La preuve du premier utilise le principe du maximum et l'expression précédente de la courbure de Gauss d'un graphe radial. On établit le second en utilisant une version simplifiée des Théorèmes 2 et 3 qui permet d'appliquer un argument de point fixe sur un domaine borné de $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\Sigma)$; on peut aussi résoudre d'abord une équation de Monge–Ampère dégénérée par la méthode de continuité, puis user d'un procédé itératif.

THÉORÈME 4. – *Soit $K \in \mathrm{C}^\infty(E_*)$ une fonction positive. Si K est partout strictement positive, il n'existe pas de graphe radial sur Σ, de classe C^2, à courbure de Gauss égale à K. S'il existe une fonction $u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ à gradient horizontal nul telle que $K(\mathrm{e}^{u(\xi)}\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \Sigma$, il existe alors un graphe radial $\mathcal{Y}$ sur Σ à courbure de Gauss donnée par K et dont le gradient horizontal de la courbure de Gauss verticale est identiquement nul.*

THÉORÈME 5. – (i) *Soit $K \in \mathrm{C}^\infty(E_*)$ une fonction partout strictement positive. On fait l'hypothèse qu'il existe deux réels r_1 et r_2 , $0 < r_1 \leqslant r_2$, tels que*

$$\min_\Sigma K(r_1\xi) \geqslant (r_1)^{1-m} \quad \textit{et} \quad \max_\Sigma K(r_2\xi) \leqslant (r_2)^{1-m}.$$

On suppose aussi que la composante horizontale du gradient de K est nulle sur l'ensemble $\{\xi \in E;\ r_1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r_2\}$. Il existe alors un graphe radial convexe $\mathcal{Y}$ sur Σ à courbure de Gauss identiquement nulle et dont la courbure de Gauss verticale est égale à K. Le graphe $\mathcal{Y}$ est de la forme $\xi \in \Sigma \mapsto \mathrm{e}^{u(\xi)}\xi$, où $u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ est une fonction à gradient horizontal identiquement nul avec $r_1 \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant r_2$.

(ii) *Réciproquement, soit $\mathcal{Y}$ un graphe radial sur Σ de la forme $\xi \mapsto \mathrm{e}^{u(\xi)}\xi$, où $u \in \mathrm{C}^\infty(\Sigma)$ est telle que $r_1 \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant r_2$. Si $\mathcal{Y}$ est convexe, la courbure de Gauss de $\mathcal{Y}$ et les gradients horizontaux de u et de la courbure de Gauss verticale de $\mathcal{Y}$ sont identiquement nuls.*

Références bibliographiques

[1] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck, Nonlinear second order elliptic equations IV. Starshaped compact Weingarten hypersurfaces, in: Y. Ohya, K. Kasahara, N. Shimakura (Eds.), Current Topics in Partial Differential Equations, Kinokunize, Tokyo, 1986, pp. 1–26.

[2] P. Delanoë, Plongements radiaux à courbure de Gauss positive prescrite, Ann. Sci. École Norm. Sup. 18 (1985) 635–649.

[3] P. Delanoë, Local inversion of elliptic problems on compact manifolds, Math. Japon. 35 (1990) 679–692.

[4] R.S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982) 65–222.

[5] M. Nagumo, Degree of mapping in convex linear topological spaces, Amer. J. Math. 73 (1951) 497–511.

[6] V.-I. Oliker, Hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge–Ampère type, Comm. Partial Differential Equations 9 (1984) 807–838.

[7] K. Yano, S. Ishihara, Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker, New York, 1973.