C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 973–978

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

De nouveaux systèmes de type Kazhikhov–Smagulov : modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach

Didier Bresch [a], El Hassan Essoufi [b], Mamadou Sy [a,c]

[a] Laboratoire de mathématiques appliquées (UMR 6620), 24, avenue des Landais, 63177 Aubière cedex, France

[b] Université Moulay Ismail, département de mathématiques, faculté des sciences et techniques, 52000 Errachadia, Maroc

[c] UFR SAT, Univ. Gaston Berger de Saint-Louis, BP 234, St-Louis, Sénégal

Reçu le 6 septembre 2002 ; accepté après révision le 16 octobre 2002

Note présentée par Pierre-Louis Lions.

Résumé On propose ici de nouveaux modèles de type Kazhikhov–Smagulov en supposant une dépendance entre le tenseur de Reynolds choisi et la loi liant la vitesse à la densité. Pour des applications liées à la pollution par exemple, le modèle obtenu admet une solution faible globale sans contrainte de taille sur les données. Le modèle est également obtenu à partir des équations compressibles sans avoir à supposer une faible diffusivité λ. Dans un cadre plus général, on montre que divers modèles peuvent se ramener à un modèle de type Kazhikhov–Smagulov et que divers résultats d'existence globale de solutions faibles peuvent être alors établis. C'est le cas pour le modèle de combustion à faible nombre de Mach proposé par A. Majda. ***Pour citer cet article : D. Bresch et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 973–978.***

Some new Kazhikhov–Smagulov type systems: pollutant spread and low Mach number combustion models

Abstract We propose some new Kazhikhov–Smagulov type models using particular Reynolds tensors depending on the relation between the velocity and the density. The pollutant spread model, for instance, has the advantage of possessing global weak solutions with no restriction on the data. Moreover, the model is obtained without assuming small enough diffusivity λ. In a general framework, several Kazhikhov–Smagulov type models may be derived and global existence of weak solutions established. This is the case for the low Mach number combustion model proposed by A. Majda. ***To cite this article: D. Bresch et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 973–978.***

Adresses e-mail : bresch@math.univ-bpclermont.fr (D. Bresch); essoufi@math.net (E.H. Essoufi); mamadou@math.univ-bpclermont.fr (M. Sy).

S1631-073X(02)02593-1/FLA

Abridged English version

In this Note, we derive some Kazhikhov–Smagulov type models from the compressible Navier–Stokes equations

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \lambda \operatorname{div}\big(\Psi(\rho) d(u)\big) + \nabla p + \widetilde{\lambda}\nabla(\operatorname{div} u) = \rho f \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

where $d(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$. The velocity u and the density ρ are assumed to satisfy

$$u = v \mp \lambda \nabla \varphi_{\pm}(\rho) \quad \text{with } \operatorname{div} v = 0, \tag{2}$$

where

$$\rho \nabla \varphi_{\pm}(\rho) = \pm \nabla \Psi(\rho) \tag{3}$$

and $\Psi > 0$. One respectively denotes φ_-, φ_+ the functions giving $-$ or $+$ in front of $\nabla\Psi$ in (3). Two examples of such closures may be found in [1,10]. It may lead to models for motion of a salt or pollutant in a shallow layer of fluid and low Mach number combustion. As far as the first one is concerned, the above closure is known as Fick's law with

$$\varphi_+ = \log \rho. \tag{4}$$

The low Mach number combustion model was proposed by Majda [9] where

$$\varphi_- = \frac{1}{\rho}.$$

The idea is now to transform Eqs. (1) into equations involving ρ and v by employing the relation (2). Choosing $\Psi(\rho) = 2\mu/\lambda$ and using (2) and (4), Kazhikhov and Smagulov [8] have derived a model neglecting the terms of $\mathrm{O}(\lambda^2)$ that means

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \lambda \Delta \rho, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \nabla \rho \cdot \nabla v - \lambda v \cdot \nabla\nabla\rho = -\nabla P + \mu \Delta v + \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

This model concerns small diffusivity and has been called the Kazhikhov–Smagulov model by Franchi and Straughan, see [6]. The initial density ρ_0 is assumed to satisfy $0 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty$. In order to obtain a global existence result of weak solutions, they made an assumption regarding the relative magnitude of λ, μ, m and M, see Théorème 1.

By choosing $\Psi(\rho) = \rho$, we prove that we obtain the modified Kazhikhov–Smagulov equations (14) without any assumption on the diffusivity λ. Our new model for motion of salt or pollutant in a shallow layer of fluid provides global existence of weak solutions with no restriction on the data. The idea to introduce a consistency hypothesis between the stress tensor and the closure of the potential part of the velocity in terms of the density originates from [3] in a different framework.

More generally, if we choose the relation (3) with (2), we obtain the Kazhikhov–Smagulov type model

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho - \lambda \Delta \Psi(\rho) = 0, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \operatorname{div}\big(\Psi(\rho) d(v)\big) - \lambda v \cdot \nabla\nabla\Psi(\rho) - \lambda \nabla\Psi(\rho) \cdot \nabla v + \nabla P = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

We prove that this model has global weak solutions if the function Ψ is an increasing function of class $\mathcal{C}^1([m, M])$, with $\Psi \geqslant c > 0$. This gives for instance the first global existence result of weak solutions in

T^d ($d=2$ or 3) to the low Mach number combustion model given in [10], p. 281. In this case $\varphi_- = 1/\rho$, $\Psi(\rho) = \log\rho$ with $m > 1$.

---

1. Introduction

Dans cette Note, on dérive différents modèles de type Kazhikhov–Smagulov à partir des équations de Navier–Stokes compressibles

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \lambda \operatorname{div}\big(\Psi(\rho) d(u)\big) + \nabla p + \widetilde{\lambda}\nabla \operatorname{div} u = \rho f \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5}$$

où $d(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$ désigne le tenseur du taux de déformation. Le domaine Ω est supposé bi ou tridimensionnel et sera précisé plus tard avec les conditions aux bords. La vitesse u et la densité ρ sont supposées satisfaire

$$u = v \mp \lambda \nabla \varphi_\pm(\rho) \quad \text{avec} \operatorname{div} v = 0, \tag{6}$$

où

$$\rho \nabla \varphi_\pm(\rho) = \pm \nabla \Psi(\rho) \tag{7}$$

avec $\Psi > 0$. On note respectivement φ_-, φ_+ les fonctions associées aux signes $-$ où $+$ devant $\nabla\Psi$ dans (7). Deux exemples de telles relations peuvent être trouvés dans [1,10]. Il s'agit d'un modèle de dispersion de polluants dans une couche mince de fluide et d'un modèle de combustion à faible nombre de Mach. En ce qui concerne le premier exemple, la relation (6) est connue sous le nom de loi de Fick avec

$$\varphi_+ = \log\rho. \tag{8}$$

Le modèle de combustion a été proposé par Majda, voir [5] et [9], avec

$$\varphi_- = \frac{1}{\rho}.$$

L'idée est maintenant de transformer les équations (5) en équations sur ρ et v en utilisant la relation (6). En choisissant $\Psi(\rho) = 2\mu/\lambda$ et en utilisant (6) et (8), Kazhikhov et Smagulov [8] ont obtenu le modèle (10) en négligeant les termes en $\mathrm{O}(\lambda^2)$. Ce modèle suppose une faible diffusivité et a été appelé le modèle de Kazhikhov–Smagulov par Franchi et Straughan, voir [6]. La densité initiale ρ_0 est supposée satisfaire $0 < m \leqslant \rho_0(x) \leqslant M < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$. Afin d'obtenir un résultat d'existence globale de solutions faibles, ils ont alors fait une hypothèse restrictive concernant λ, μ, m et M.

En choisissant $\Psi(\rho) = \rho$, on montre que l'on obtient le modèle de Kazhikhov–Smagulov modifié (14) sans aucune hypothèse de petitesse sur la diffusivité λ. Notre nouveau modèle pour l'évolution de sel ou polluants dans une couche mince de fluide possède une solution faible globale sans restriction sur les données. L'idée de supposer une certaine compatibilité entre le tenseur des contraintes et la loi liant la partie potentielle de la vitesse u à ρ est née du travail réalisé dans [3] dans un cadre différent. Tous ces travaux posent la question du domaine de validité du terme de diffusion $-\nu\Delta u$.

Plus généralement, si l'on choisit la relation (7) entre Ψ et $\varphi_\pm$ avec la relation (6), on obtient le modèle de type Kazhikhov–Smagulov (16). On montre que ce modèle possède une solution faible globale si la fonction Ψ est strictement croissante, de classe C^1 sur $[m, M]$, avec $\Psi \geqslant c > 0$. Ceci donne, par exemple, un résultat d'existence globale de solutions faibles dans T^d ($d=2$ ou 3) pour le modèle de combustion à faible nombre de Mach décrit dans [10], p. 281. Dans ce cas $\varphi_- = 1/\rho$, $\Psi(\rho) = \log\rho$ et $m > 1$.

2. Équations de Kazhikhov–Smagulov

On considère l'écoulement d'un fluide compressible constitué de deux composants avec une diffusion obéissant à une loi de Fick. Le fluide occupe un domaine borné Ω de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que la vitesse barycentrique u des deux constituants, la pression p et la densité totale du mélange ρ satisfont l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u + \nabla p + (\mu + \widetilde{\lambda})\nabla(\operatorname{div} u) = \rho f \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{9}$$

où f désigne une force extérieure. La vitesse u et la densité ρ sont supposées satisfaire la loi de Fick (6) et (8). L'idée est de transformer les équations en injectant (6) et (8) dans (9) pour obtenir des équations satisfaites par ρ et v permettant ainsi d'utiliser la relation d'incompressibilité.

Le système complet s'écrit en supprimant les termes en $O(\lambda^2)$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement,

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \lambda\Delta\rho, \\ \rho\partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda\nabla\rho \cdot \nabla v - \lambda v \cdot \nabla\nabla\rho = -\nabla P + \mu\Delta v + \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases} \tag{10}$$

C'est le modèle de Kazhikhov–Smagulov, cf. [3,8]. Si l'on supprime les termes $-\lambda\nabla\rho \cdot \nabla v$ et $-\lambda v \cdot \nabla\nabla\rho$ dans le système précédent, on obtient le modèle de Graffi. Ces deux modèles sont valables pour une faible diffusivité. On pourra consulter [6] pour une comparaison des modèles de Graffi et de Kazhikhov–Smagulov. Si l'on retient les termes en $O(\lambda^2)$, on obtient le modèle étudié entre autres par Beirao Da Veiga [2] ou Secchi [11].

On suppose $f \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)$ ($d = 2$ ou 3) et les données initiales $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ et $v_0 \in (L^2(\Omega))^d$ avec pour presque tout $x \in \Omega$

$$0 < m \leqslant \rho_0(x) \leqslant M < +\infty.$$

On cherche une solution faible (v,ρ) telle que

$$v = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{11}$$

Rappelons pour le lecteur le résultat d'existence globale obtenu dans [1], Theorem 4.1, p. 141.

THÉORÈME 1. – *Supposons que les données satisfont la régularité et les bornes précédentes. Soit λ, μ, M et m tels que*

$$\mu - \lambda\frac{M-m}{2} > 0. \tag{12}$$

Alors il existe une solution faible globale en temps de (10), (11) *telle que*

$$v \in L^\infty\big(0,T;\big(L^2(\Omega)\big)^d\big) \cap L^2\big(0,T;\big(H^1_0(\Omega)\big)^d\big),$$
$$\rho \in L^\infty\big(0,T;H^1(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T;H^2(\Omega)\big).$$

Idée de preuve. – Par le principe du maximum, on obtient rapidement que

$$0 < m \leqslant \rho(t,x) \leqslant M < +\infty$$

pour tout $t \geqslant 0$ et pour presque tout $x \in \Omega$. Pour obtenir des bornes d'énergie suffisantes pour le résultat d'existence, le terme délicat à estimer est le terme $-\lambda v \cdot \nabla\nabla\rho$. En effet, le terme $-\lambda\nabla\rho \cdot \nabla v$ testé contre v disparaît avec le terme de diffusion en ρ présent dans l'équation de la masse lorsque l'on teste cette équation contre $|v|^2/2$. Pour le terme parasite $-\lambda v\cdot\nabla\nabla\rho$, on écrit

$$-\lambda\int_\Omega v\cdot\nabla\nabla\rho\cdot v=-\lambda\int_\Omega \rho^t\nabla v:\nabla v.$$

On utilise maintenant la relation suivante

$$\int_\Omega {}^t\nabla v:\nabla v=0$$

pour écrire

$$-\lambda\int_\Omega v\cdot\nabla\nabla\rho\cdot v=-\lambda\int_\Omega\left(\rho-\frac{M+m}{2}\right)^t\nabla v:\nabla v.$$

Si l'on veut que ce terme soit absorbé par la partie visqueuse, il faut alors supposer (12). La régularité sur $\nabla\rho$ s'obtient en prenant $\Delta\rho$ comme fonction test et en utilisant les bornes de ρ. $\square$

3. Équations de Kazhikhov–Smagulov modifiées

On considère maintenant le modèle de départ suivant

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\ \partial_t(\rho u)+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)=-\nabla p+\widetilde{\lambda}\nabla(\operatorname{div}u)+\lambda\operatorname{div}\big(\rho d(u)\big)+\rho f,\end{cases}\tag{13}$$

où $d(u)=(\nabla u+{}^t\nabla u)/2$ désigne le tenseur du taux de déformation avec u et ρ reliées par (6) et (8). On a donc choisi une viscosité dépendant du coefficient de diffusivité λ. C'est une fonction linéaire en ρ. On remarque que ce type de tenseur de Reynolds en $\operatorname{div}(\rho d)$ a été récemment étudié dans des modèles de type Korteweg, de type Saint-Venant et en lubrification dans [3] et dans [7]. En utilisant les relations (6) et (8), on obtient alors le système suivant

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho v)=\lambda\Delta\rho,\\ \rho\partial_t v+\rho v\cdot\nabla v-\lambda\nabla\rho\cdot\nabla v-\lambda v\cdot\nabla\nabla\rho=-\nabla P+\lambda\operatorname{div}\big(\rho d(v)\big)+\rho f,\\ \operatorname{div}v=0.\end{cases}\tag{14}$$

Ce modèle possède de multiples avantages par rapport au modèle initial (10) de Kazhikhov–Smagulov. Il est tout d'abord valable pour une plage de diffusivité non restreinte car nous n'avons pas supprimé les termes en $\mathrm{O}(\lambda^2)$. Les termes restants rentrent tous dans le gradient de pression. Ce modèle est également globalement bien posé par le théorème suivant

THÉORÈME 2. – *Supposons que les données satisfont la régularité et les bornes précédentes de la Section* 2. *Alors il existe une solution faible globale en temps de* (14), (11) *telle que*

$$v\in\mathrm{L}^\infty\big(0,T;\big(\mathrm{L}^2(\Omega)\big)^d\big)\cap\mathrm{L}^2\big(0,T;\big(\mathrm{H}^1_0(\Omega)\big)^d\big),$$
$$\rho\in\mathrm{L}^\infty\big(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega)\big)\cap\mathrm{L}^2\big(0,T;\mathrm{H}^2(\Omega)\big).$$

Idée de preuve. – Il suffit de voir que le terme $-\lambda v\cdot\nabla\nabla\rho$ qui posait problème dans l'étude du modèle initial vient ici se joindre au terme de diffusion $\operatorname{div}(\rho d(v))$. On obtient

$$-\int_\Omega\operatorname{div}(\rho\, d)\cdot v+v\cdot\nabla\nabla\rho\cdot v=\frac14\int_\Omega\rho\,|\operatorname{curl}v|^2.$$

Comme v est à divergence nulle et $v=0$ sur $\partial\Omega$, on contrôle le gradient car

$$\Delta=\nabla\operatorname{div}-\operatorname{curl}\operatorname{curl}.$$ $\square$

4. Équations de type Kazhikhov–Smagulov généralisées

On montre dans cette section qu'il est possible de généraliser l'idée utilisée dans la section précédente en essayant d'établir une classe de modèles pouvant se ramener à un système de type Kazhikhov–Smagulov. Supposons que la vitesse u, la pression p et la densité ρ satisfont

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \lambda \operatorname{div}\big(\Psi(\rho)\, d(u)\big) - \widetilde{\lambda} \nabla(\operatorname{div} u) + \nabla p = \rho f, \end{cases} \tag{15}$$

avec u et ρ reliés par les relations (6), (7). On montre alors que le système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla\rho - \lambda \Delta\Psi(\rho) = 0, \\ \rho\partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \operatorname{div}\big(\Psi(\rho) d(v)\big) - \lambda v \cdot \nabla\nabla\Psi(\rho) - \lambda \nabla\Psi(\rho) \cdot \nabla v + \nabla P = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases} \tag{16}$$

On obtient alors un système dissipatif pour lequel on a un résultat d'existence globale de solution faible sans restriction sur les données en supposant seulement Ψ de classe $\mathcal{C}^1([m, M])$ strictement positive et strictement croissante.

Combustion à faible nombre de Mach. – Un exemple de système du type (6), (15) autre que celui considéré dans la Section 3 concerne le modèle de combustion à faible nombre de Mach proposé par Majda dans [9] et étudié par Embid dans [5]. Dans ce cas, la relation entre u et ρ est donnée par (6) avec $\varphi_-(\rho) = 1/\rho$. Un résultat d'existence globale de solutions faibles en dimension deux dans $\mathbb{R}^2$ pour ρ proche de l'équilibre a été donné par Lions dans [10], p. 281. Nous montrons dans [4] que ce système admet une solution faible globale pour $\Omega = T^d$ ($d = 2$ ou 3) avec $\mu(\rho) = \lambda\Psi(\rho) = \lambda \log \rho$ et $1 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < +\infty$ sans restriction de taille sur les données.

Remerciements. Le premier et le troisième auteur remercient le Professeur Mary-Teuw Niane pour de multiples discussions et pour son sens aigu du dévouement pour la collectivité.

Références bibliographiques

[1] S.N. Antonsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakov, Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids, North-Holland, 1990.
[2] H. Beirao da Veiga, Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions, Ann. Scuola Norm. Pisa 10 (1983) 341–351.
[3] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems, Comm. Partial Differential Equations (2002), à paraître.
[4] D. Bresch, E.H. Essoufi, M. Sy, Some new Kazhikhov–Smagulov type models, en préparation.
[5] P. Embid, Well-posedness of the nonlinear equations for zero Mach number combustion, Comm. Partial Differential Equations 12 (1987) 1227–1284.
[6] F. Franchi, B. Straughan, A comparison of the Graffi and Kazhikhov–Smagulov models for heavy pollution instability, Adv. Water Ressources 24 (2001) 585–594.
[7] F. Gerbeau, B. Perthame, Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; Numerical results, Discrete Continuous Dynamical Systems Ser. B 1 (2001) 89–102.
[8] A. Kazhikhov, Sh. Smagulov, The correctness of boundary value problems in a diffusion model of an inhomogeneous fluid, Soviet Phys. Dokl. 22 (1977) 249–252.
[9] A. Majda, Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Dimensions, Appl. Math. Sci., Vol. 53, Springer-Verlag, 1984.
[10] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 2, Compressible Models, Oxford University Press, 1998.
[11] P. Secchi, On the motion of viscous fluids in the presence of diffusion, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988) 22–31.