Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 273–276
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Une classification des flots solutions d'une EDS
A classification of the flows solution of a SDE

Yves Le Jan, Olivier Raimond

Université Paris Sud, mathématiques, bât. 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 27 juin 2002 ; accepté le 3 décembre 2002

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

Sous des hypothèses assez générales, nous montrons que les flots de noyaux peuvent être associés à une équation différentielle stochastique (EDS). Nous montrons aussi un théorème de classification des solutions d'une EDS : elles peuvent être obtenues en filtrant la solution coalescente par un sous-bruit contenant le bruit blanc dirigeant l'EDS. L'exemple des flots isotropes est étudié. ***Pour citer cet article : Y. Le Jan, O. Raimond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Under general hypotheses, we show that the flows of kernels can be associated to a stochastic differential equation (SDE). We also show a classification theorem of the solutions of the SDE: they can be obtained through filtering the coalescing solution with respect to a sub-noise containing the white noise driving the SDE. The example of the isotropic flows is studied. ***To cite this article: Y. Le Jan, O. Raimond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Flots stochastiques de noyaux et EDS

Soit M une variété lisse localement compacte et $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ une famille compatible de semigroupes felleriens telle que le mouvement à un point défini par $\mathsf{P}_t^{(1)}$ est continu et vérifiant $C_K^2(M) \otimes C_K^2(M) \subset \mathcal{D}(A^{(2)})$, où $\mathcal{D}(A^{(2)})$ est le domaine du générateur infinitésimal $A^{(2)}$ de $\mathsf{P}_t^{(2)}$. Dans la Note [4], nous avons vu qu'à cette famille sont associés un semigroupe de convolution fellerien ν et un flot de noyaux K.

Soit A (resp. $A^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$) le générateur infinitésimal de $\mathsf{P}_t^{(1)}$ (resp. de $\mathsf{P}_t^{(n)}$) dans $C^2(M)$ (resp. dans $C_K^2(M) \otimes \cdots \otimes C_K^2(M)$). Alors pour tout $f \in C_K^2(M)$, $M_t^f = f(X_t^{(1)}) - f(X_0^{(1)}) - \int_0^t Af(X_s^{(1)})\,\mathrm{d}s$ est une martingale telle que $\langle M^f \rangle_t = \int_0^t \Gamma(f)(X_s^{(1)})\,\mathrm{d}s$ où $\Gamma(f) = Af^2 - 2fAf$. Pour toutes f et g dans $C_K^2(M)$ soit $\Gamma(f,g) := A(fg) - fAg - gAf$. Soit $C = A^{(2)} - I \otimes A - A \otimes I$ alors

Adresses e-mail : Yves.LeJan@math.u-psud.fr (Y. Le Jan), Olivier.Raimond@math.u-psud.fr (O. Raimond).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00005-0

Proposition 1.1. *C est une fonction de covariance sur $\mathcal{X}(M)$, l'espace des champs de vecteurs.*[1] *Et pour toutes $f_1, \ldots, f_n$ dans $C_K^2(M)$, alors $g = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathcal{D}(A^{(n)})$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$,*

$$A^{(n)}g(x) = \sum_i \prod_{j \neq i} f_j(x_i) A f_i(x_i) + \sum_{i<j} C(f_i, f_j)(x_i, x_j) \prod_{k \neq i,j} f_k(x_k). \tag{1}$$

Nous appelerons $\Gamma(f,g)(x) - C(f,g)(x,x)$ la forme de diffusion pure. Les flots diffusifs (i.e., qui ne sont pas des flots d'applications mesurables) pour lesquels la forme de diffusion pure est nulle seront appelés des flots turbulents. Dans la suite, nous supposerons que la forme de diffusion pure est nulle.

Définition 1.2. La restriction de A à $C_K^2(M)$ et C sont appelés les caractéristiques locales de la famille $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ ou du semigroupe de convolution fellerien associé ν, que nous appelerons alors un semigroupe de convolution–diffusion.

Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espace de probabilité, soit K un flot de noyaux associé à $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$. Pour tous $s \leqslant t$, $f \in C_K^2(M)$ et $x \in M$, soit

$$M_{s,t} f(x) = K_{s,t} f(x) - f(x) - \int_s^t K_{s,u}(Af)(x)\,\mathrm{d}u. \tag{2}$$

Pour tous $s < t$, $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, posons $t_k^n = s + k2^{-n}(t-s)$ et $W_{s,t}^n = \sum_{k=0}^{2^n-1} M_{t_k^n, t_{k+1}^n}$. Alors $(M_{t_k^n, t_{k+1}^n})_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathcal{X}(M)$.

Pour tous $s < t$, nous définissons une variable aléatoire $W_{s,t}$ à valeurs dans $\mathcal{X}(M)$ telle que $W_{s,t} f(x)$ est la limite dans $L^2(\mathsf{P})$ de $W_{s,t}^n f(x)$ pour tous $x \in M$ et $f \in C_K^2(M)$. Enfin, par le théorème limite central sur les tableaux (voir [1]), on montre que $W = (W_{s,t},\ s \leqslant t)$ est un bruit blanc[2] à valeurs dans $\mathcal{X}(M)$, de fonction de covariance C.

Proposition 1.3. *W est le seul bruit blanc à valeurs dans $\mathcal{X}(M)$ tel que pour tous $s < t$, $x \in M$ et $f \in C_K^2(M)$, P-p.s.,*

$$K_{s,t} f(x) = f(x) + \int_s^t K_{s,u}\big(Wf(\mathrm{d}u)\big)(x) + \int_s^t K_{s,u}(Af)(x)\,\mathrm{d}u. \tag{3}$$

Remarquons que se donner les caractéristiques locales du flot équivaut à se donner cette EDS, que nous appelerons l'EDS (A, C). Par une solution de l'EDS (A, C), nous entendons un flot de noyaux K et un bruit blanc W à valeurs dans $\mathcal{X}(M)$ de covariance C tels que (3) est satisfaite.

Nous dirons que $K = (K_{s,t},\ s \leqslant t)$ est une solution forte de l'EDS (A, C) si et seulement si pour tous $s \leqslant t$, $K_{s,t}$ est $\mathcal{F}_{s,t}^W$-mesurable, où $\mathcal{F}_{s,t}^W$ est la sous-tribu $\sigma(W_{u,v},\ s \leqslant u \leqslant v \leqslant t)$ complétée par les parties P-négligeables de $\mathcal{A}$. Nous dirons alors que $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ et ν définissent une solution forte de l'EDS (A, C).

Considérons maintenant le flot canonique associé à ν, un semigroupe de convolution–diffusion. Soit $N_\nu^W := (\Omega^0, \mathcal{A}^0, (\mathcal{F}_{s,t}^W)_{s \leqslant t}, \mathsf{P}_\nu, (T_h)_{h \in \mathbb{R}})$ le bruit engendré par W. Alors N_ν^W est un sous-bruit gaussien de N_ν, le bruit engendré par le flot canonique. Soit $\overline{K}$ le flot obtenu en filtrant le flot canonique par N^W. Alors $\overline{K}$ est aussi une

[1] i.e., $C : T^*M^2 \to \mathbb{R}$ est symétrique, la restriction de C à $T_x^*M \times T_y^*M$ est bilineaire et pour tout $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} C(\xi_i, \xi_j) \geqslant 0$ (cf. [2]). Pour toutes f et g dans $C_K^1(M)$, $C(\mathrm{d}f(x), \mathrm{d}g(y))$ sera notée $C(f,g)(x,y)$.

[2] Soit tel que pour tous $s < t < u$, $W_{s,t} + W_{u,t} = W_{s,u}$ et pour tous $t_1 < \cdots < t_n$, $(W_{t_i, t_{i+1}})_{1 \leqslant i < n}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes avec $\mathsf{E}[\langle W_{s,t}, \xi\rangle \langle W_{s,t}, \xi'\rangle] = (t-s)C(\xi, \xi')$.

solution de l'EDS (A, C) et possède les mêmes caractéristiques locales que le flot canonique. De plus $\overline{K}$ est une solution forte de l'EDS (A, C). Notons ν^W le semigroupe de convolution–diffusion associé.

Définition 1.4. Nous disons qu'il y a unicité forte pour l'EDS (A, C) s'il n'existe qu'un semigroupe de convolution–diffusion ayant pour caractéristiques locales (A, C) et définissant une solution forte.

2. Classification

Fixons désormais une paire de caractéristiques locales (A, C). Soit $\mathcal{M}(n, x)$ le problème de martingale suivant associé à $A^{(n)}$ et $x \in M^n$: Il existe un espace de probabilité sur lequel est défini un processus stochastique $X^{(n)} = (X_t^{(n)},\ t \geqslant 0)$ sur M^n tel que $f(X_t^{(n)}) - f(x) - \int_0^t A^{(n)} f(X_s^{(n)})\,\mathrm{d}s$ est une martingale pour toute $f \in C_K^2(M) \otimes \cdots \otimes C_K^2(M)$.

Nous supposerons que la condition suivante est satisfaite

(U) Pour tout $n \geqslant 1$, le problème de martingale $\mathcal{M}(n, x)$ a une unique solution dans l'ensemble des trajectoires arrêtées en $\Delta_n = \{x \in M^n,\ \exists i \neq j,\ x_i = x_j\}$.

Remarquons que (U) est vérifiée si $A^{(2)}$ est elliptique en dehors de la diagonale ou si ses coefficients sont C^2 en dehors de la diagonale.

Lorsque les caractéristiques locales sont non coalescentes, soit lorsque la solution du problème de martingale $\mathcal{M}(2, x)$ partant en dehors de la diagonale ne touche jamais la diagonale, alors (U) entraîne que ces caractéristiques locales sont associées à un unique semigroupe de convolution définissant une solution forte de l'EDS (A, C). Remarquons que les EDS lipschitziennes vérifient ces conditions.

Lorsque (C) (voir [4]) est vérifiée, nous avons vu dans la Note [4] qu'à ν, un semigroupe de convolution de caractéristique locales (A, C), est associé un semigroupe de convolution ν^c dominant faiblement ν et tel que P_{ν^c} est la loi d'un flot coalescent. Notons $\nu^{c,W}$ le semigroupe de convolution associé au flot de noyaux obtenu en filtrant ce flot coalescent par $N_{\nu^c}^W$. De plus,

Théorème 2.1. *Soit un système de caractéristiques locales (A, C) vérifiant* (U) *et* (C)*, et associé à au moins un semigroupe de convolution ν. Alors*

(a) *ν^c est le seul semigroupe de convolution–diffusion associé à (A, C) et définissant un flot* (*coalescent*) *d'applications.*
(b) *$\nu^{c,W}$ est le seul semigroupe de convolution–diffusion associé à (A, C) et définissant une solution forte de l'EDS (A, C).*
(c) *Les semigroupes de convolution–diffusion associés à (A, C) sont tous les semigroupes de convolution felleriens dominés faiblement par ν^c et dominant $\nu^{c,W}$.*

3. La partie linéaire de N_{ν^c}

Soient $\mathcal{F}$ la filtration $(\mathcal{F}_{0,t})_{t \geqslant 0}$ et $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ l'espace des $\mathcal{F}$-martingales locales de carré intégrable.

Proposition 3.1. *Toute $\mathcal{F}$-martingale $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ a la propriété de représentation prévisible* : *il existe des processus prévisibles $\Phi^\alpha = (\Phi_s^\alpha)_{s \geqslant 0}$ tels que $M_t = \sum_\alpha \int_0^t \Phi_s^\alpha W^\alpha(\mathrm{d}s)$.*

Pour tout semigroupe de convolution–diffusion ν, N_ν est un bruit prévisible, i.e., $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ est constitué de martingales continues. En suivant Tsirelson [5], une représentation linéaire d'un bruit prévisible $N = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}, \mathsf{P}, (T_h)_{h\in\mathbb{R}})$ est un bruit blanc réel $(X_{s,t},\ s \leqslant t)$ telles que $X_{s,t} \circ T_h = X_{s+h,t+h}$ pour tous $s \leqslant t$ et $h \in \mathbb{R}$, et $X_{s,t}$ est $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable pour tous $s \leqslant t$. Pour tous $-\infty \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, soit $\mathcal{F}^{\mathrm{lin}}_{s,t}$ la sous-tribu engendrée par les variables aléatoires $X_{u,v}$, où X est une représentation linéaire et $s \leqslant u \leqslant v \leqslant t$, et complétée par les parties P-negligeables de $\mathcal{F}_{-\infty,+\infty}$. Alors $N_{\mathrm{lin}} := (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}^{\mathrm{lin}}_{s,t})_{s\leqslant t}, \mathsf{P}, (T_h)_{h\in\mathbb{R}})$ est un bruit. Il sera appelé la partie linéaire du bruit N et est le sous-bruit gaussien maximal de N. Ainsi, N est gaussien si et seulement si $N_{\mathrm{lin}} = N$.

Théorème 3.2. $N^W_{\nu^c} = N^{\mathrm{lin}}_{\nu^c}$.

Ce théorème entraîne que si $\nu^c \neq \nu^{c,W}$, alors N_{ν^c} est prévisible mais non gaussien.

4. Flots isotropes

Soit M, un espace symétrique et C une fonction de covariance sur $\mathcal{X}(M)$. Sous une hypothèse d'isotropie convenable, on associe à C une métrique sur M et on note P_t le semigroupe de la chaleur associé.

Soit W un bruit blanc de covariance C à valeurs dans $\mathcal{X}(M)$ et $(S_{s,t},\ s \leqslant t)$ la famille d'opérateurs aléatoires définis dans [2], associé à W et à P_t. On définit alors $(\mathsf{P}^{(n)}_t,\ n \geqslant 1)$ une famille compatible de semigroupes felleriens par $\mathsf{P}^{(n)}_t = \mathsf{E}[S^{\otimes n}_{0,t}]$ (avec $\mathsf{P}^{(1)}_t = \mathsf{P}_t$). Le semigroupe de convolution associé est un semigroupe de convolution–diffusion (sans diffusion pure) et a pour caractéristiques locales $(\frac{1}{2}\Delta, C)$. Nous le noterons ν^W.

Soit $(d_t)_{t\geqslant 0}$ le processus distance induit par le mouvement de deux points $X^{(2)}_t = (X_t, Y_t)$ $(d_t = d(X_t, Y_t))$. L'isotropie de C implique que ce processus est une diffusion positive.

Proposition 4.1.

(a) ν^W *définit un flot d'applications non coalescent* (*soit tel que le mouvement de deux points partant hors de la diagonale ne touche jamais la diagonale*) *si et seulement si* 0 *est un point frontière naturel.*
(b) ν^W *définit un flot coalescent si et seulement si* 0 *est un point frontière fermé de sortie.*
(c) ν^W *définit un flot turbulent sans choc* (*soit tel que le mouvement de deux points partant hors de la diagonale ne touche jamais la diagonale*) *si et seulement si* 0 *est un point frontière ouvert d'entrée.*
(d) ν^W *définit un flot turbulent avec chocs* (*soit tel que le mouvement à deux points peut toucher la frontière*) *si et seulement si* 0 *est un point frontière régulier réfléchissant.*

Dans tous les cas, à l'exception de (d), ν^W *est le seul semigroupe de convolution–diffusion ayant pour caractéristiques locales* $(\frac{1}{2}\Delta, C)$. *Dans le cas* (d), *appelé la phase intermédiaire,* $\nu^c \neq \nu^W$ *et les Théorèmes* 2.1 *et* 3.2 *s'appliquent. Ainsi,* N_{ν^c} *est un bruit prévisible non gaussien.*

Ces résultats s'appliquent en particulier aux flots de Sobolev étudiés dans [2,3].

Références

[1] P. Billingsley, Probability and Measure, 2nd edition, in: Wiley Ser. Probab. Math. Statist., Wiley, New York, 1986.
[2] Y. Le Jan, O. Raimond, Integration of Brownian vector fields, Ann. Probab. 30 (2) (2002) 826–873.
[3] Y. Le Jan, O. Raimond, Flows, coalescence and noise, math.PR/0203221.
[4] Y. Le Jan, O. Raimond, Flots de noyaux et flots coalescents, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 336 (2003).
[5] B. Tsirelson, Unitary Brownian motions are linearizable, math.PR/9806112. Also MSRI Preprint No. 1998-027, 1998.