



Équations aux dérivées partielles

Sur les équations de Lane–Emden avec opérateurs non linéaires

Isabeau Birindelli, Françoise Demengel

Département de mathématiques, Université de Cergy-Pontoise, site Saint-Martin, PB 222, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France

Reçu le 18 novembre 2002 ; accepté le 4 février 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note on considère les solutions non négatives de l'équation non linéaire

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2u) + |x|^\alpha u^p = 0,$$

dans \mathbb{R}^N , et $\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2u)$ est l'opérateur de Pucci

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(M) = \lambda \sum_{e_i < 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i,$$

où les e_i sont les valeurs propres de M et $\Lambda \geq \lambda > 0$. On montre que si u vérifie une hypothèse de décroissance à l'infini

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{\beta-1} u(x) = 0$$

avec $(\beta - 1)(p - 1) > 2 + \alpha$, alors u est radiale. Dans un deuxième temps on montre que si $p < \frac{N+2\alpha+2}{N-2}$, toute solution radiale de (1), $u(x) = g(r)$, telle que g'' ne change de signe qu'une seule fois, est nulle. **Pour citer cet article : I. Birindelli, F. Demengel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the Lane–Emden equations with fully nonlinear operators. In this Note we consider nonnegative solutions for the nonlinear equation

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2u) + |x|^\alpha u^p = 0$$

in \mathbb{R}^N , where $\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2u)$ is the so called Pucci operator

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(M) = \lambda \sum_{e_i < 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i,$$

Adresse e-mail : Francoise.Demengel@math.u-cergy.fr (F. Demengel).

and the e_i are the eigenvalues of M et $\Lambda \geq \lambda > 0$. We prove that if u satisfies the decreasing estimate

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{\beta-1} u(x) = 0$$

for some β satisfying $(\beta - 1)(p - 1) > 2 + \alpha$ then u is radial. In a second time we prove that if $p < \frac{N+2\alpha+2}{N-2}$ and u is a nonnegative radial solution of (1), $u(x) = g(r)$, such that g'' changes sign at most once, then u is zero. **To cite this article:** *I. Birindelli, F. Demengel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this paper we consider the nonnegative solutions of the following fully nonlinear equation

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2 u) + |x|^\alpha u^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Here $\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2 u)$ is the Pucci operator given by

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(M) = \lambda \sum_{e_i < 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i,$$

where the e_i are the eigenvalues of the symmetric matrix M and $\Lambda \geq \lambda > 0$.

Our first result is

Theorem 1. *Any nonnegative classical solution of (1) satisfying*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|^{\beta-1} u(x) = 0$$

for $(\beta - 1)(p - 1) > 2 + \alpha$ is radial.

This is proved by using the moving planes method. It is well known that in unbounded domains this method requires that the solutions decay at infinity; let us note that in the case of the Laplacian (i.e., $\lambda = \Lambda$), Kelvin transformation allows to overcome this requirement (see, e.g., [2]).

Theorem 2. *If $p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ there are no positive classical radial solutions $u(x) = g(|x|)$ of*

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2 u) + u^p |x|^\alpha = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2)$$

such that $g''(r)$ changes sign only once.

The proof of this result uses estimates on g and g' at infinity and some kind of Pohozaev identity.

We conclude by saying that the result has been proved with no radial assumption when either $\lambda(N - 1) - \Lambda \leq 0$ or $p < \frac{\lambda(N-1)+\Lambda+2\alpha}{\lambda(N-1)-\Lambda}$ by Cutrì and Leoni [3]. Finally we expect the result to hold true for $p < \frac{\lambda(N-1)+3\Lambda+2\alpha}{\lambda(N-1)-\Lambda}$ when $\lambda(N - 1) - \Lambda > 0$.

1. Introduction

On démontre ici un résultat de type Liouville analogue au résultat de Gidas et Spruck [4] pour le Laplacien :

Théorème (Gidas–Spruck). *Pour $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ toute solution non négative de*

$$\Delta u + u^p = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n$$

est identiquement nulle.

Dans un autre travail Caffarelli, Gidas et Spruck (voir [1]) donnent une preuve différente en montrant que toute solution est radiale, et en utilisant une identité de Pohozaev, ils montrent que les solutions radiales sont nulles.

Un travail préliminaire au présent est fait dans Cutrí et Leoni pour l'inéquation

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2u) + |x|^\alpha |u|^p \leq 0, \quad u \geq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Elles montrent que si $\lambda(N - 1) - \Lambda \leq 0$ ou bien si $p \leq \frac{\lambda(N-1)+\Lambda+2\alpha}{\lambda(N-1)-\Lambda}$, les solutions de viscosité sont nulles. On s'intéresse ici au cas de Éq. (1) avec $\lambda(N - 1) - \Lambda > 0$ et p tels que

$$\frac{\lambda(N - 1) + \Lambda + 2\alpha}{\lambda(N - 1) - \Lambda} < p \leq \frac{N + 2 + 2\alpha}{N - 2}.$$

Remarquons que, par exemple pour $\alpha = 0$, cet intervalle n'est pas vide si $N > 2$ et si $\frac{\Lambda}{\lambda} < \frac{4(N-1)}{2N}$.

On commence par montrer que, sous une hypothèse de décroissance à l'infini, les solutions sont radiales :

Théorème 3. *Si $(\beta - 1)(p - 1) > 2 + \alpha$ et si u est une solution classique ≥ 0 de (1) telle que*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{\beta-1} u(x) = 0$$

alors u est radiale.

Dans un deuxième temps on considère des solutions radiales

Théorème 4. *Si $p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ la seule solution classique de (1), non négative et radiale $u(x) = g(|x|)$ telle que g'' change de signe au plus une fois est la solution nulle.*

Nous terminons cette section en observant que nous nous attendons à ce que ce résultat soit probablement encore valable pour $p < \frac{\lambda(N-1)+3\Lambda+2\alpha}{\lambda(N-1)-\Lambda}$.

2. Idées des preuves des Théorèmes 3 et 4

Preuve du Théorème 3. La démonstration suit la technique des plans mobiles ainsi que l'ont exposée Chen et Li dans [2] et le fait que les opérateurs de Pucci sont invariants par réflexion par rapport à un hyperplan.

Précisément, soit l'hyperplan $T_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N, x_1 = \delta\}$ et Σ_δ le demi-espace $\{x_1 < \delta\}$. On définit la fonction symétrisée $u_\delta = u(2\delta - x_1, x')$, $x_\delta = (2\delta - x_1, x')$, et $z_\delta = u_\delta - u$. On montre l'existence de δ_0 tel que $z_{\delta_0} = 0$

Première étape : z_δ est solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\sum_{ij} a_{ij}(x, u, \delta)(z_\delta)_{,ij} + c(x, u, \delta)z_\delta = 0$$

avec $|c(x, u, \delta)| \leq C|x|^{-(p-1)(\beta-1)+\alpha}$, $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x, u, \delta)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$.

Deuxième étape : On suppose que le minimum de z_δ sur Σ_δ est < 0 . Par le comportement à l'infini de z_δ et puisque $z_\delta = 0$ sur T_δ , les minima de z_δ sont dans un compact. On montre dans ce qui suit que le compact est indépendant de δ . C'est à dire qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout y tel que $|y| \geq R$, $z_\delta(y_1, y') \geq 0$. On montre

dans un premier temps qu'il existe $R > 0$ tel que pour y tel que $|y_1| \geq R$, $z_\delta(y_1, y') \geq 0$, puis on fait de même dans toutes les directions de coordonnées.

On introduit $g(x) = \log(2 - x_1)$ et $w_\delta = z_\delta/g$. w_δ satisfait

$$\sum_{ij} a_{ij}(x, u, \delta) w_{\delta,ij} + \sum_j a_{1j} \frac{w_{\delta,j} g_{,1}}{g} + \left(\frac{a_{11} g_{,11}}{g} + c(x) \right) w_\delta = 0.$$

Soit R et C tel que pour $|x| \geq R$

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^{(p-1)(\beta-1)}},$$

$$\log(2 - R) > \frac{2Cp}{\lambda}.$$

En un point y où z_δ atteint son minimum supposé strictement négatif, et tel que $|y_1| \geq R$ on a $u(y_\delta) \leq u(y)$ d'où une majoration de $c(y, u, \delta)$

$$|c(y, u, \delta)| \leq \frac{Cp}{|y|^{(p-1)(\beta-1)-\alpha}} \leq \frac{Cp}{|y_1|^{(p-1)(\beta-1)-\alpha}}$$

on obtient d'une part puisque y est un minimum

$$\sum_{ij} a_{ij}(y, u, \delta) w_{\delta,ij}(y) \geq 0$$

et d'autre part par le comportement à l'infini de $\frac{g_{,11}}{g}$ et $a_{11} \geq \lambda > 0$,

$$\frac{a_{11} g_{,11}}{g}(y) + c(y) \leq -\frac{2Cp}{|y_1|^{(p-1)(\beta-1)-\alpha}} + \frac{Cp}{|y_1|^{(p-1)(\beta-1)-\alpha}} < 0$$

ce qui contredit l'équation au point y . En faisant de même dans toutes les directions de coordonnées, il existe R tel que pour $|y| > R$, pour tout δ , $z_\delta \geq 0$.

Troisième étape : Pour $\delta < 0$ avec $|\delta|$ grand, $z_\delta \geq 0$.

Sinon, il existerait une suite $\delta_n \leq -n$, $\min z_{\delta_n} = w_{\delta_n}(y_n) < 0$. Si $n > R$, puisque $y_n \in \Sigma_{\delta_n}$, $|y_n| \geq |\delta_n| > n > R$, ce qui contredit l'étape 2.

On définit $\delta_0 = \sup\{\delta < 0, z_\delta \geq 0 \text{ in } \Sigma_\delta\}$.

Si $\delta_0 < 0$ alors $z_{\delta_0} = 0$ et ceci termine la démonstration. En effet soit $\delta_n > \delta_0$ qui tend vers δ_0 et $x_n \in \Sigma_{\delta_n}$ avec $z_{\delta_n}(x_n) < 0$ et $\nabla z_{\delta_n}(x_n) = 0$. En extrayant une sous-suite, $x_n \rightarrow \bar{x}$, $\bar{x} \in \Sigma_{\delta_0}$, $z_{\delta_0}(\bar{x}) \leq 0$ et par définition de δ_0 , $z_{\delta_0}(\bar{x}) = 0$. Par le principe du maximum strict $\bar{x} \in T_{\delta_0}$ et $\partial_1 z_{\delta_0}(\bar{x}) < 0$, ce qui contredit $\nabla z_{\delta_n}(x_n) = 0$, sauf si $z_{\delta_0} \equiv 0$ et u est symétrique par rapport à T_{δ_0} .

Si $\delta_0 = 0$, on refait la même démonstration en partant de $\delta > 0$. Par le même raisonnement il y a deux hypothèses ou bien l'on a $\delta_1 > 0$ et u est symétrique par rapport à $x_1 = \delta_1$, ou bien $\delta_0 = \delta_1 = 0$ ce qui entraîne que u est symétrique par rapport à T_0 . En agissant de même pour toutes les directions, u est radiale. \square

Preuve du Théorème 4. Soit u une solution de classe \mathcal{C}^2 radiale. On peut écrire $u(x) = g(|x|) = g(r)$. Il est classique que les valeurs propres de la matrice Hessienne de g sont $\frac{g'(r)}{r}$ de multiplicité $N - 1$ et $g''(r)$ d'ordre 1 (see, e.g., [3]).

En conséquence Éq. (1) peut s'écrire

$$ag'' + b \frac{g'(r)}{r} = -r^\alpha g^p(r)$$

avec a et b qui changent de valeurs suivant les hypothèses de croissance ou de décroissance sur g' et g'' . On notera $\gamma = \frac{b}{a}$ et $\tilde{\gamma} = \frac{\lambda(N-1)}{\Lambda}$. On fait quelques remarques sur g .

On a $g'(0) = 0$, de même en utilisant l'équation et la régularité de g ;

$$(b + a)g''(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(ag''(r) + b \frac{g'(r)}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} -r^\alpha g^p(r) \leq 0$$

et l'inégalité est stricte pour $\alpha = 0$.

Enfin en intégrant $(r^\gamma g')' = -r^{\alpha+\gamma} g^p/a$ au voisinage de 0 on obtient $g' < 0$ pour r petit.

En fait $g'(r) < 0$ pour tout $r > 0$. Par contradiction soit $]0, r_0[$ le plus grand intervalle sur lequel $g' < 0$. En r_0 ,

$$g''(r_0) = \lim_{\theta \rightarrow 0, \theta > 0} \frac{g'(r_0) - g'(r_0(1 - \theta))}{r_0\theta} \geq 0$$

et par l'équation $g''(r_0) = -g^p(r_0)r_0^\alpha/a < 0$, une contradiction.

Enfin $g''(r) < 0$ pour $r > 0$ petit et ne peut être toujours négatif car $g > 0$.

Dans un deuxième temps on montre l'estimation

$$g(r) \leq \left(g(0)^{1-p} + \frac{r^{2+\alpha}}{(2+\alpha)\Lambda(\alpha+N)} \right)^{1/(1-p)} \tag{3}$$

(cette estimation est valable même si g'' change plusieurs fois de signe). Puis en revenant à l'équation

$$-g'(r) \leq C' r^{(p+\alpha+1)/(1-p)} \tag{4}$$

au voisinage de l'infini.

On suppose maintenant que g'' ne change de signe qu'une fois en \bar{r} . On note $L_\gamma(g(r)) = r^{-\gamma}[r^\gamma g'(r)]'$ avec γ qui change de valeurs suivant l'intervalle sur lequel on est. En choisissant r_1 et r_2 tels que γ ne change pas sur $[r_1, r_2]$ et en intégrant par parties il est facile de voir que :

$$\int_{r_1}^{r_2} L_\gamma(g(r))g'(r)r^{\gamma+1} dr = \frac{\gamma-1}{2} \int_{r_1}^{r_2} r^\gamma (g'(r))^2 dr + \frac{1}{2} [r^{\gamma+1} g'(r)^2]_{r_1}^{r_2}. \tag{5}$$

Par ailleurs l'équation implique que $L_\gamma(g(r))g'(r)r^{\gamma+1} = -r^{\alpha+\gamma+1} g^p(r)g'(r)$. En substituant et en faisant une intégration par parties (5) devient

$$\frac{\gamma-1}{2} \int_{r_1}^{r_2} r^\gamma (g')^2 + \left[\frac{r^{\gamma+1} (g')^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} + \left[\frac{g^{p+1} r^{\gamma+\alpha+1}}{a(p+1)} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\gamma+\alpha+1}{a(p+1)} \int_{r_1}^{r_2} g^{p+1} r^{\gamma+\alpha}.$$

En multipliant l'équation par $g(r)r^\gamma$ on a

$$\int_{r_1}^{r_2} r^\gamma (g')^2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{g^{p+1}}{a} r^{\gamma+\alpha} + [r^\gamma g g']_{r_1}^{r_2}.$$

En retranchant il vient

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\gamma+\alpha+1}{p+1} - \frac{\gamma-1}{2} \right) \int_{r_1}^{r_2} r^{\gamma+\alpha} g^{p+1} = \left[\frac{r^{\gamma+1} (g')^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} + \left[\frac{g^{p+1} r^{\gamma+\alpha+1}}{a(p+1)} \right]_{r_1}^{r_2} + \frac{\gamma-1}{2} [r^\gamma g g']_{r_1}^{r_2}. \tag{6}$$

En choisissant $r_1 = 0$ et $r_2 = \bar{r}$ et en utilisant $g'(\bar{r}) = -g^p(\bar{r})r^{\alpha+1}/b$ (6) devient

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{N+\alpha}{p+1} - \frac{N-2}{2} \right) \int_0^{\bar{r}} r^{N+\alpha-1} g^{p+1} = g^{p+1}(\bar{r})\bar{r}^{N+\alpha} \left(\frac{1}{\lambda(p+1)} - \frac{N-2}{2\lambda(N-1)} + \frac{\bar{r}^{\alpha+2} g^{p-1}(\bar{r})}{2\lambda^2(N-1)^2} \right).$$

On choisit maintenant $r_1 = \bar{r}$ et $r_2 = R > r_1$ et (6) s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\bar{\gamma} + \alpha + 1}{p + 1} - \frac{\bar{\gamma} - 1}{2} \right) \int_{\bar{r}}^R r^{\bar{\gamma} + \alpha} g^{p+1} dr \\ &= g^{p+1}(R) R^{\bar{\gamma} + \alpha + 1} \frac{1}{\Lambda(p + 1)} + \frac{\bar{\gamma} - 1}{2} R^{\bar{\gamma}} g'(R) g(R) + \frac{1}{2} R^{\bar{\gamma} + 1} g'(R)^2 \\ & \quad - g^{p+1}(\bar{r}) \bar{r}^{\bar{\gamma} + \alpha + 1} \left(\frac{1}{\Lambda(p + 1)} - \frac{\bar{\gamma} - 1}{2\bar{\gamma}\Lambda} + \frac{\bar{r}^{2 + \alpha} g^{p-1}(\bar{r})}{2\lambda^2(N - 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Soit

$$A = \frac{1}{\lambda(p + 1)} - \frac{N - 2}{2\lambda(N - 1)}, \quad B = \frac{\bar{r}^{2 + \alpha} g^{p-1}(\bar{r})}{2\lambda^2(N - 1)^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{\Lambda(p + 1)} - \frac{\bar{\gamma} - 1}{2\bar{\gamma}\Lambda}.$$

En multipliant la première identité par λ et la seconde par $\Lambda(\bar{r})^{N - \bar{\gamma} - 1}$ et en les ajoutant, on obtient pour le coefficient de $\bar{r}^{N + \alpha} g^{p+1}(\bar{r})$

$$(\lambda A - \Lambda C) + (\lambda - \Lambda)B \leq \frac{\bar{\gamma} - 1}{2\bar{\gamma}} - \frac{N - 2}{2(N - 1)} \leq 0$$

et finalement en utilisant l'estimation sur g et g'

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{N + \alpha}{p + 1} - \frac{N - 2}{2} \right) \int_0^{\bar{r}} r^{N + \alpha - 1} g^{p+1} + (\bar{r})^{N - \bar{\gamma} - 1} \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\bar{\gamma} + \alpha + 1}{p + 1} - \frac{\bar{\gamma} - 1}{2} \right) \int_{\bar{r}}^R r^{\bar{\gamma} + \alpha} g^{p+1} \\ & \leq C R^{\bar{\gamma} + 1} R^{2(p + 1 + \alpha)/1 - p}. \end{aligned}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ et en utilisant $\frac{N + \alpha}{p + 1} - \frac{N - 2}{2} > 0$ et $\frac{\bar{\gamma} + \alpha + 1}{p + 1} - \frac{\bar{\gamma} - 1}{2} > 0$ qui sont conséquences des hypothèses, on obtient $g \equiv 0$. \square

Références

- [1] L.A. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck, Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, *Comm. Pure Appl. Math.* 42 (1989) 271–297.
- [2] W. Chen, C. Li, Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations, *Duke Math. J.* 63 (1991) 615–622.
- [3] A. Cutrì, F. Leoni, On the Liouville property for fully nonlinear equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 17 (2000) 219–245.
- [4] B. Gidas, J. Spruck, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1981) 525–598.