



Équations aux dérivées partielles

Rôle de l'espace de Besov $\mathbf{B}_{\infty}^{-1,\infty}$ dans le contrôle de l'explosion éventuelle en temps fini des solutions régulières des équations de Navier–Stokes

Ramzi May

Département des mathématiques, Université d'Evry, boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry cedex, France

Reçu le 10 février 2003 ; accepté après révision le 18 mars 2003

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Soit $u \in C([0, T^*]; L^n(\mathbb{R}^n)^n)$ une solution maximale des équations de Navier–Stokes. Nous montrons que u est C^∞ sur $]0, T^*[\times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe une constante $\varepsilon_* > 0$, qui ne dépend que de n , telle que si $T^* < \infty$ alors, pour toute $\omega \in S(\mathbb{R}^n)^n$, on a $\overline{\lim}_{t \rightarrow T^*} \|u(t) - \omega\|_{\mathbf{B}_{\infty}^{-1,\infty}} \geq \varepsilon_*$. **Pour citer cet article :** R. May, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The role of the Besov space $\mathbf{B}_{\infty}^{-1,\infty}$ in the control of the eventual explosion in finite time of the regular solutions of the Navier–Stokes equations. Let $u \in C([0, T^*]; L^n(\mathbb{R}^n)^n)$ be a maximal solution of the Navier–Stokes equations. We prove that u is C^∞ on $]0, T^*[\times \mathbb{R}^n$ and there exists a constant $\varepsilon_* > 0$, which depends only on n , such that if T^* is finite then, for all $\omega \in S(\mathbb{R}^n)^n$, we have $\overline{\lim}_{t \rightarrow T^*} \|u(t) - \omega\|_{\mathbf{B}_{\infty}^{-1,\infty}} \geq \varepsilon_*$. **To cite this article :** R. May, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Nous utilisons dans cette Note les notations suivantes : on désigne par n un entier fixe supérieur à 3. Tous les espaces fonctionnels considérés sont définis sur l'espace \mathbb{R}^n . Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach tel que $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$, on note par \mathbf{X} l'espace produit X^n , on pose $\mathbf{X}_\sigma = \{f \in \mathbf{X}; \operatorname{div}(f) = 0\}$ et on désigne par $\widetilde{\mathbf{X}}$ l'adhérence de $S(\mathbb{R}^n)^n$ dans \mathbf{X} .

Soient $u_0 \in \mathbf{L}_\sigma^n$ et $u \in C([0, T^*]; \mathbf{L}_\sigma^n)$ la solution maximale des équations intégrales de Navier–Stokes associées à la donnée initiale u_0

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \mathbb{L}(\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u))(t), \tag{NSI}$$

Adresse e-mail : rmay@lami.univ-evry.fr (R. May).

où \mathbb{P} est le projecteur de Leray et \mathbb{L} est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathbb{L}(f)(t) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s) \, ds. \quad (1)$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution u , on pourra consulter les références ([3,4,6] et [9]). En ce qui concerne la régularité de u , P.G. Lemarié-Rieusset [6] a montré, en utilisant le critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, que la solution u appartient à l'espace $C([0, T^*[, \mathbf{L}^\infty)$ et qu'elle est, par conséquent, de classe C^∞ sur l'ouvert $Q_{T^*} =]0, T^*[\times \mathbb{R}^n$. Nous présentons, dans ce papier, une autre démonstration élémentaire et directe de la régularité de u .

Supposons, dorénavant, que notre solution u explose en temps fini, i.e., $T^* < \infty$, (nous ne savons pas, jusqu'à présent, si un tel phénomène est possible ou non). Notre objectif principal est d'étudier le comportement de $u(t)$ au voisinage de T^* . Rappelons que Y. Giga [2] a prouvé que les normes $\|u(t)\|_p$, $n < p \leq \infty$, tendent vers l'infini avec une vitesse supérieure à $C_p(T^* - t)^{(n/p-1)/2}$. Dans le cas limite où $p = n$, H. Sohr et W. Von Wahl [10] ont montré que u ne peut pas être uniformément continue sur $[0, T^*[$ à valeurs dans l'espace \mathbf{L}^n . H. Kozono et H. Sohr [5] ont précisé ce résultat en montrant l'existence d'une constante $\varepsilon_{KS} > 0$, qui ne dépend que de n , telle que si $\lim_{t \rightarrow T^*} u(t) = u^*$ dans \mathbf{L}^n faible, alors $\overline{\lim}_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_n^n - \|u^*\|_n^n \geq \varepsilon_{KS}$. Comme conséquence, ils ont prouvé que u n'appartient pas à l'espace $BV([0, T^*, [\mathbf{L}^n)$. Récemment, L. Escauriaza, G. Seregin et V. Šverák [1] ont montré, qu'en trois dimensions d'espace ($n = 3$), si la solution u appartient en plus à l'espace d'énergie de Leray–Hopf $\mathcal{L}_{T^*} = L_{T^*}^\infty(\mathbf{L}^2) \cap L_{T^*}^2(\mathbf{H}^1)$, alors $\overline{\lim}_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_3 = \infty$. Dans cette Note, nous démontrons le théorème suivant qui précise le comportement de $u(t)$ dans l'espace limite de Besov $\mathbf{B}_\infty^{-1,\infty}$ (rappelons que $\mathbf{L}^n \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty}$). Ce résultat est fort utile dans l'étude de la régularité des solutions faibles des équations de Navier–Stokes (voir [7] et [8]).

Théorème 1. *Il existe une constante $\varepsilon_* > 0$ qui ne dépend que de n telle que, pour toute $\omega \in \widetilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty}$, on a*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T^*} \|u(t) - \omega\|_{\widetilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty}} \geq \varepsilon_*. \quad (2)$$

Remarque. Nous montrons dans [8] que ce résultat de persistance reste vrai lorsqu'on remplace l'espace \mathbf{L}^n par d'autres espaces fonctionnels tels que les espaces de Lebesgue \mathbf{L}^p (avec $p > n$) ou l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^{d/2-1}$.

Une conséquence immédiate de ce théorème est le résultat suivant.

Corollaire. *La solution u n'appartient pas à l'espace $BV([0, T^*[, \widetilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty})$.*

Démonstration. En utilisant l'injection de \mathbf{L}^n dans $\widetilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty}$, le Théorème 1 nous permet de construire par récurrence une suite strictement croissante $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $]0, T^*[$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\|u(t_{j+1}) - u(t_j)\|_{\mathbf{B}_\infty^{-1,\infty}} \geq \varepsilon_*$. D'où le résultat. \square

Avant de passer à la démonstration du Théorème 1, nous énonçons quelques résultats préliminaires. Pour les démonstrations de ces résultats ainsi que pour les définitions de la décomposition de Littlewood–Paley, du paraproduit de Bony et des espaces de Besov, nous renvoyons les lecteurs aux références [6,7] et [8].

Le premier résultat est une version améliorée du théorème d'existence de Kato [4].

Théorème de Kato. *Soit $v_0 \in \mathbf{L}_\sigma^n$. Il existe un unique temps maximal $T_* \stackrel{\text{def}}{=} T_K^*(v_0) \in]0, \infty[$ et une unique fonction vectorielle $v \stackrel{\text{def}}{=} S_K^*(v_0) \in \bigcap_{0 < T < T_*} \mathbf{L}_K^n(Q_T)$ solution maximale sur $]0, T_*[$ des équations (NSI) associées à la donnée initiale v_0 , où $\mathbf{L}_K^n(Q_T)$ est l'espace des fonctions $w \in C([0, T]; \mathbf{L}_\sigma^n)$ telles que $\sqrt{t}w \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty)$*

et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|w(t)\|_\infty = 0$. Cette solution v est de classe C^∞ sur l'ouvert Q_{T^*} , plus précisément $v \in \bigcap_{j,i \in \mathbb{N}} C_t^i([0, T^*], \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{j,\infty})$. Enfin, il existe une constante positive ε_n , qui ne dépend que de n , telle que si pour un réel positif T on a $(1 + \|v_0\|_n) \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} v_0\|_\infty \leq \varepsilon_n$ alors $T_K^*(v_0) \geq \inf(1, T)$.

Une conséquence directe de ce théorème est le lemme principal suivant.

Lemme 1. Soit $v_0 \in \mathbf{L}_\sigma^n$. On pose $v = S_K^*(v_0)$ et $T_K^* = T_K^*(v_0)$. Alors pour tout $t_0 \in]0, T_K^*[$ on a $T_K^*(v(t_0)) = T_K^* - t_0$ et $S_K^*(v(t_0)) = v(\cdot + t_0)$. Si on suppose que $0 < T_K^* - t_0 \leq 1$ alors

$$I_*(v_0, t_0) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 + \|v(t_0)\|_n) \sup_{0 < t < T_K^*(v_0) - t_0} \sqrt{t} \|e^{t\Delta}(v(t_0))\|_\infty > \varepsilon_n. \tag{3}$$

Le lemme suivant caractérise l'effet régularisant de l'opérateur \mathbb{L} .

Lemme 2. Il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tous $T \in]0, 1]$, $\alpha \in \{1, 2\}$ et $r \in \mathbb{R}$, l'opérateur \mathbb{L} , défini par (1), est continu de $C([0, T]; \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{r,\infty})$ dans $C([0, T]; \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{r+\alpha,\infty})$ et sa norme est inférieure à $C_n T^{(2-\alpha)/2}$.

Pour énoncer le dernier lemme, nous introduisons la définition d'une *version affaiblie* du para-produit vectoriel de Bony. Soient f et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions. On définit, formellement, les deux opérateurs bilinéaires π_0 et π_1 par $\pi_i(f \otimes g) = \sum_{k=0}^\infty S_{k+i}(f) \otimes \Delta_k(g)$, $i = 0, 1$. Rappelons que dans le cas où f et g sont dans $S(\mathbb{R}^n)^n$ on a bien l'identité $f \otimes g = \pi_0(f \otimes g) + \pi_1(g \otimes f)$.

Lemme 3. Soit $s > 1$. Il existe une constante positive $C_{n,s}$ telle que les opérateurs π_0 et π_1 sont continus de $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty} \times \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{1+s,\infty}$ (resp. $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \times \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{1+s,\infty}$) dans $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s,\infty}$ (resp. $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{1+s,\infty}$) et leurs normes sont inférieures à $C_{n,s}$. En particulier si f et g sont dans $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{1+s,\infty}$ alors $f \otimes g = \pi_0(f \otimes g) + \pi_1(g \otimes f)$ dans $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{1+s,\infty}$.

Démonstration du Théorème 1. Nous partageons la démonstration en trois étapes.

1^{ère} étape. Montrons que $T^* = T_K^*(u_0)$ et que $u = S_K^*(u_0)$ (il en résulte, en particulier, que $u \in C^\infty(Q_{T^*})$). En vertu de l'unicité des solutions des équations de Navier–Stokes dans $C([0, T]; \mathbf{L}^n)$ [3], nous avons $T^* \geq T_K^*(u_0)$ et $u = S_K^*(u_0)$ sur $[0, T_K^*(u_0)[$. On conclut alors dès qu'on prouve que $T^* \leq T_K^*(u_0)$. Supposons que $T_K^*(u_0) < T^*$. Alors l'ensemble $S_K^*(u_0)([0, T_K^*(u_0)[) = u([0, T_K^*(u_0)[)$ est un précompact de \mathbf{L}^n . Utilisant ensuite le fait que pour toute $f \in \mathbf{L}^n$, $\sup_{0 < s < 1} \sqrt{s} \|e^{s\Delta} f\|_\infty \leq c_n \|f\|_n$ et $\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} \|e^{s\Delta} f\|_\infty = 0$, on montre qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que, pour tout $t_0 \in [0, T_K^*(u_0)[$, on a $(1 + \|S_K^*(u_0)(t_0)\|_n) \sup_{0 < t < \lambda} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} S_K^*(u_0)(t_0)\|_\infty \leq \varepsilon_n$. Prenons t_0 tel que $0 < T_K^*(u_0) - t_0 < \lambda$, il vient $I_*(u_0, t_0) \leq \varepsilon_n$, ce qui est absurde d'après (3).

2^{ème} étape. Montrons que pour tout $0 < a < T^*$, $u \notin L^\infty([a, T^*[, L^\infty)$. On raisonne par l'absurde et on pose $v_0 = u(a)$ et $v = S_K^*(v_0)$. Alors, d'après le Lemme 1 et l'étape précédente, on a $M \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0 < t < T_K^*(v_0)} \|v(t)\|_\infty < \infty$. Un calcul élémentaire utilisant le lemme de Gronwall, l'inégalité de Young et le fait que le noyau de l'opérateur $e^{t\Delta} \mathbb{P} \nabla$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)^{n \times n}$ et que sa norme est inférieure à C/\sqrt{t} , nous permet de prouver que $N \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0 < t < T_K^*(v_0)} \|v(t)\|_n$ est fini. Par conséquent, pour tout $t_0 \in [0, T_K^*(v_0)[$, on a $I_*(v_0, t_0) \leq C(1 + N) M \sqrt{T_K^*(v_0) - t_0}$, ce qui contredit (3).

3^{ème} étape. Soit $\varepsilon > 0$ pour lequel on suppose qu'il existe $\omega \in S(\mathbb{R}^n)^n$ vérifiant $\overline{\lim}_{t \rightarrow T^*} \|u(t) - \omega\|_{\mathbf{B}_\infty^{-1,\infty}} < \varepsilon$. Il existe alors $\delta_0 \in]0, T^*[$ tel que pour tout $t \in [T^* - \delta, T^*[$ on a $\|u(t) - \omega\|_{\mathbf{B}_\infty^{-1,\infty}} < \varepsilon$. Soit $\delta \in]0, \delta_0[$ un réel à fixer ultérieurement. On pose $w_0 = u(T^* - \delta)$, alors, d'après la 1^{ère} étape et le Lemme 1, $T_K^*(w_0) = \delta$ et

$w = S_K^*(w_0) = u(\cdot + T^* - \delta)$. Par conséquent $\sup_{0 < t < \delta} \|w(t) - \omega\|_{\mathbf{B}_\infty^{-1,\infty}} < \varepsilon$. Soit $s > 0$. Le théorème de Kato assure que $w \in C([0, \delta]; \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty})$, il en résulte, d'après le Lemme 3,

$$w(t) = e^{t\Delta} w_0 + \sum_{j=0}^1 \mathbb{L}(\mathbb{P}\nabla \cdot \pi_j[(w - \omega) \otimes w]) + \mathbb{L}(\mathbb{P}\nabla \cdot \pi_j[\omega \otimes w])(t).$$

Utilisons encore le Lemme 3 et le fait que $\mathbb{P}\nabla$ est continue de $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{r,\infty}$ dans $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{r-1,\infty}$ ($r \in \mathbb{R}$), on trouve que, pour tout $\delta' \in]0, \delta[$, on a

$$\sup_{0 < t < \delta'} \|w(t)\|_{\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty}} \leq \|w_0\|_{\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty}} + C\{\varepsilon + \|\omega\|_\infty \sqrt{\delta}\} \sup_{0 < t < \delta'} \|w(t)\|_{\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty}},$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de n et s . Supposons par l'absurde que $\varepsilon < \varepsilon_* \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{4C}$. Choisissons, maintenant, δ tel que la quantité $C\{\varepsilon + \|\omega\|_\infty \sqrt{\delta}\}$ soit inférieure à $\frac{1}{2}$, on obtient que le $\sup_{0 < t < \delta} \|w(t)\|_{\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty}}$ est majoré par $2\|w_0\|_{\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty}}$. Rappelons que $\tilde{\mathbf{B}}_\infty^{s+1,\infty}$ s'injecte dans \mathbf{L}^∞ et que $w = u(\cdot + T^* - \delta)$, il vient que $\sup_{T^* - \delta < t < T^*} \|u(t)\|_\infty$ est fini, ce qui est impossible d'après l'étape précédente. Donc, pour toute $\omega \in S(\mathbb{R}^n)^n$, $\lim_{t \rightarrow T^*} \|u(t) - \omega\|_{\mathbf{B}_\infty^{-1,\infty}} \geq \varepsilon_*$. Par densité, cette dernière estimation reste vraie pour toute $\omega \in \tilde{\mathbf{B}}_\infty^{-1,\infty}$.

Références

- [1] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Šverák, On $L_{3,\infty}$ -solutions to the Navier–Stokes equations and backward uniqueness, Preprint.
- [2] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier–Stokes system, J. Differential Equations 62 (1986) 182–212.
- [3] G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, Sur l'unicité dans $L^3(R^3)$ des solutions mild des équations de Navier–Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 325 (1997) 1253–1256.
- [4] T. Kato, Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions, Math. Z. 187 (1984) 471–480.
- [5] H. Kozono, H. Sohr, Regularity criterion on weak solutions to the Navier–Stokes equations, Adv. Differential Equations 2 (1997) 535–554.
- [6] P.G. Lemarié-Rieusset, Recent Developments in the Navier–Stokes Problem, CRC Press, 2002.
- [7] R. May, Existence, unicité et régularité des solutions faibles des équations de Navier–Stokes, Thèse, Univ. Evry, 2002.
- [8] R. May, Persistance des solutions régulières des équations de Navier–Stokes, en préparation.
- [9] Y. Meyer, Wavelets, paraproducts and Navier–Stokes equations, in: Current Developments in Mathematics 1996, International Press, Cambridge, MA, 1999.
- [10] H. Sohr, W. Von Wahl, On the singular set and the uniqueness of weak solutions of the Navier–Stokes equations, Manuscripta Math. 49 (1984) 27–59.