



Statistique/Probabilités

Interpolation de processus stationnaire

Alain Boudou

Laboratoire de statistique et probabilités, UMR CNRS C5583, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne,
31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 16 décembre 2002 ; accepté après révision le 15 avril 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Dans ce texte, étant donné un homomorphisme f et une mesure aléatoire Z' , nous définissons toutes les mesures aléatoires Z dont l'image par f est égale à Z' . Nous résolvons donc l'équation $f(Z) = Z'$ où l'inconnue est la mesure aléatoire Z . Les résultats obtenus sont appliqués à des problèmes d'interpolation. **Pour citer cet article :** A. Boudou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Stationary process interpolation. In this paper, we define all the random measures Z whose image by a certain homomorphism f is equal to a given random measure Z' . This means that we solve the equation $f(Z) = Z'$ where the random measure Z is unknown. The obtained results are applied to interpolation problems. **To cite this article:** A. Boudou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Il est bien connu qu'à tout processus stationnaire on peut associer une mesure aléatoire (au sens de [1]) dont il est la transformée de Fourier et qui le définit d'une façon biunivoque. Étant donné une série stationnaire $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, transformée de Fourier de la mesure aléatoire Z' , nous nous proposons d'exprimer en fonction de Z' toute mesure aléatoire associée à une série stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $(X_{nq})_{n \in \mathbb{Z}} = (X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, c'est-à-dire que, compte tenu de ce qui précède, nous nous proposons de définir les séries stationnaires $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $X_{nq} = X'_n$ pour tout n de \mathbb{Z} . Nous traitons également un problème analogue concernant les fonctions stationnaires : nous exprimons en fonction de Z' toute mesure aléatoire dont la transformée de Fourier est un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tel que $X_n = X'_n$ (pour tout n de \mathbb{Z}). Ces problèmes d'interpolation reviennent à résoudre des équations du type $f(Z) = Z'$.

Pour cela nous résolvons une équation où l'inconnue est une mesure spectrale. La solution générale de cette équation combine « solution particulière » et « solution de l'équation homogène » par le biais du produit de convolution de mesures spectrales tel que celui-ci est défini en [3].

Adresse e-mail : boudou@cict.fr (A. Boudou).

2. Rappels et notations

Précisons les notations et examinons quelques rappels. On désigne par $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de H , \mathbb{C} -Hilbert, qui, compte tenu de nos préoccupations, est du type $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ou bien $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Une *mesure aléatoire* (m.a.) Z définie sur \mathcal{F} , tribu de parties de F , à valeurs dans l'espace de Hilbert H , est une mesure vectorielle telle que pour tout couple (A_1, A_2) d'éléments disjoints de \mathcal{F} : $\langle Z(A_1), Z(A_2) \rangle = 0$.

On montre alors que l'application $\mu_Z : A \in \mathcal{F} \mapsto \|Z(A)\|^2 \in \mathbb{R}^+$ est une mesure bornée et l'*intégrale stochastique*, relativement à Z , peut se définir comme l'unique isométrie de $L^2(F, \mathcal{F}, \mu_Z)$ sur $H_Z = \text{vect}\{Z(A), A \in \mathcal{F}\}$ qui à 1_A associe $Z(A)$ ($= \int 1_A dZ$).

Une *mesure spectrale* (m.s.) ε sur \mathcal{F} pour H est une application de \mathcal{F} dans $\mathcal{P}(H)$ telle que $\varepsilon(A_1 \cup A_2) = \varepsilon(A_1) + \varepsilon(A_2)$, pour tout couple (A_1, A_2) d'éléments disjoints de \mathcal{F} , telle que $\varepsilon(F) = i_H$ et telle que $\lim_n \varepsilon(A_n)(X) = 0$ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} convergeant en décroissant vers ϕ et pour tout X de H .

Lorsque Z est une m.a. définie sur \mathcal{F} à valeurs dans H , on peut montrer (cf. [2]) que pour tout A de \mathcal{F} l'application $\varepsilon(A) : X \in H_Z \mapsto \int 1_A \varphi dZ \in H_Z$, où φ est l'unique élément de $L^2(\mu_Z)$ tel que $X = \int \varphi dZ$, est un projecteur, et que l'application $\varepsilon : A \in \mathcal{F} \mapsto \varepsilon(A) \in \mathcal{P}(H_Z)$ est une m.s. appelée *m.s. associée à Z* .

Si (F', \mathcal{F}') est un deuxième espace mesurable, f une application mesurable de F dans F' et Z (resp. ε) une m.a. définie sur \mathcal{F} à valeurs dans H (resp. une m.s. sur \mathcal{F} pour H) l'application $f(Z) : A' \in \mathcal{F}' \mapsto Z(f^{-1}A') \in H$ (resp. $f(\varepsilon) : A' \in \mathcal{F}' \mapsto \varepsilon(f^{-1}A') \in \mathcal{P}(H)$) est une m.a. (resp. m.s.) appelée m.a. (resp. m.s.) *image de Z (resp. ε) par f* . Lorsque φ est un élément de $L^2(F', \mathcal{F}', \mu_{f(Z)})$ $\varphi \circ f$ appartient à $L^2(F, \mathcal{F}, \mu_Z)$ et : $\int \varphi d f(Z) = \int \varphi \circ f dZ$.

Nous désignerons par G (resp. G') un groupe abélien localement compact dont le dual \widehat{G} (resp. \widehat{G}') est à base dénombrable. Du fait que \widehat{G} (resp. \widehat{G}') est à base dénombrable, on peut en déduire que $\widehat{G} \times \widehat{G}$ (resp. $\widehat{G}' \times \widehat{G}'$) dual de $G \times G$ (resp. $G' \times G'$) est également à base dénombrable et que, notant $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ (resp. $\mathcal{B}_{\widehat{G}'}$) la tribu borélienne de \widehat{G} (resp. \widehat{G}'), $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ (resp. $\mathcal{B}_{\widehat{G}'} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}'}$) est la tribu de Borel de $\widehat{G} \times \widehat{G}$ (resp. $\widehat{G}' \times \widehat{G}'$).

Nous dirons que *deux m.s. ε_1 et ε_2 sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H commutent lorsque tous les couples $(\varepsilon_1(A_1), \varepsilon_2(A_2))$ commutent. On peut alors affirmer (cf. [3]) qu'il existe une m.s. et une seule, notée $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H telle que $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2(A_1 \times A_2) = \varepsilon_1(A_1) \circ \varepsilon_2(A_2)$ pour tout (A_1, A_2) de $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \times \mathcal{B}_{\widehat{G}}$. L'image de $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ par l'application $(\gamma_1, \gamma_2) \in \widehat{G} \times \widehat{G} \mapsto \gamma_1 + \gamma_2 \in \widehat{G}$, notée $\varepsilon_1 * \varepsilon_2$, est appelée *produit de convolution de ε_1 et ε_2* .*

Rappelons enfin que lorsque $(X_g)_{g \in G}$ est une fonction aléatoire continue (f.a.c.) stationnaire à valeurs dans H il existe une m.a. Z et une seule, dite *m.a. associée à $(X_g)_{g \in G}$* , définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ à valeurs dans H telle que $X_g = \int (\cdot, g)_{\widehat{G}} dZ(\cdot)$ pour tout g de G .

3. L'équation $f(\varepsilon) = \varepsilon'$

Étant donné f un homomorphisme mesurable de \widehat{G} dans \widehat{G}' , u une application mesurable de \widehat{G}' dans \widehat{G} telle que $f \circ u = i_{\widehat{G}'}$ et ε' une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}'}$ pour H l'objet de ce paragraphe est de définir toutes les m.s. ε sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H solutions de l'équation $f(\varepsilon) = \varepsilon'$. Pour résoudre celle-ci nous allons examiner quelques propriétés algébriques du produit tensoriel. Désignant par δ_0 la mesure de Dirac concentrée en 0 nous noterons $\varepsilon_{\widehat{G}}$ (resp. $\varepsilon_{\widehat{G}'}$) la m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ (resp. $\mathcal{B}_{\widehat{G}'}$) pour H égale à $\delta_0(\cdot)I_H$. On peut alors énoncer la :

Proposition 3.1. (a) $\varepsilon_{\widehat{G}}$ commute avec toute m.s. ε sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H et : $\varepsilon_{\widehat{G}} * \varepsilon = \varepsilon$;

(b) si l'on note 0 l'application $\gamma \in \widehat{G} \mapsto 0 \in \widehat{G}'$, pour toute m.s. ε sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H on a : $0(\varepsilon) = \varepsilon_{\widehat{G}'}$;

(c) si h est un homomorphisme mesurable de \widehat{G} dans \widehat{G}' et si ε_1 et ε_2 sont deux m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H qui commutent alors $h(\varepsilon_1)$ et $h(\varepsilon_2)$ commutent et : $h(\varepsilon_1 * \varepsilon_2) = (h(\varepsilon_1)) * (h(\varepsilon_2))$;

(d) si h_1 et h_2 sont deux applications mesurables de \widehat{G} dans \widehat{G}' et si ε est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H alors $h_1 + h_2$ est mesurable, les m.s. $h_1(\varepsilon)$ et $h_2(\varepsilon)$ commutent et $(h_1 + h_2)(\varepsilon) = (h_1(\varepsilon)) * (h_2(\varepsilon))$.

Ces différents résultats nous permettent de démontrer la :

Proposition 3.2. *Lorsque ε'' est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H qui commute avec $u(\varepsilon')$ et telle que $f(\varepsilon'') = \varepsilon_{\widehat{G}'}$, la m.s. $u(\varepsilon') * \varepsilon''$ est solution de l'équation $f(\varepsilon) = \varepsilon'$; réciproquement toutes les solutions de cette équation sont du type $u(\varepsilon') * \varepsilon''$ où ε'' est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H qui commute avec $u(\varepsilon')$ et dont l'image par f est égale à $\varepsilon_{\widehat{G}'}$.*

En effet la première partie résulte des égalités : $f((u(\varepsilon')) * \varepsilon'') = ((f \circ u)(\varepsilon')) * (f(\varepsilon'')) = \varepsilon' * \varepsilon_{\widehat{G}'} = \varepsilon'$. Quant à la deuxième partie on considère l'application $l : \gamma \in \widehat{G} \mapsto -u(f(\gamma)) \in \widehat{G}$ et ε une m.s. solution. Les m.s. $\varepsilon'' = (l + i_{\widehat{G}})(\varepsilon)$ et $u(\varepsilon') = (u \circ f)(\varepsilon)$ commutent. La Proposition 3.1 permet d'écrire : $f(\varepsilon'') = \varepsilon_{\widehat{G}'}$, et $u(\varepsilon') * \varepsilon'' = \varepsilon$.

4. L'équation $f(Z) = Z'$

Désormais I est un ensemble dénombrable et l'on suppose que : $f^{-1}(\{0\}) = \{\gamma_i; i \in I\}$. Dans ce paragraphe, étant donné une m.a. Z' définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}'}$ à valeurs dans H , nous nous proposons de déterminer toutes les m.a. Z définies sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ à valeurs dans H telles que $f(Z) = Z'$. Pour résoudre cette équation nous utiliserons la

Proposition 4.1. *Si $\{Z_i; i \in I\}$ est une famille dénombrable de m.a. définies sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ à valeurs dans H telle que la famille $\{Z_i(\widehat{G}); i \in I\}$ soit sommable et telle que $\langle Z_{i_1}(A_1), Z_{i_2}(A_2) \rangle = 0$ pour tout couple d'éléments distincts (i_1, i_2) de I et pour tout (A_1, A_2) de $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \times \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ alors : (a) pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ la famille $\{Z_i(A); i \in I\}$ est sommable; (b) l'application $A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto \sum_{i \in I} Z_i(A) \in H$ est une m.a.*

Nous utiliserons également le :

Théorème–Définition 4.2. *Étant donné un ensemble dénombrable $\{P_i; i \in I\}$ de projecteurs orthogonaux de H nous dirons qu'il constitue une famille orthogonale de projecteurs lorsque pour tout couple d'éléments distincts (i_1, i_2) de I : $P_{i_1} \circ P_{i_2} = 0$. On démontre alors que : (a) pour tout x de H la famille $\{P_i(x); i \in I\}$ est sommable; (b) l'application $x \in H \mapsto \sum_{i \in I} P_i(x) \in H$ est un projecteur orthogonal appelé somme de la famille $\{P_i; i \in I\}$.*

Les solutions du problème posé sont alors fournies par la :

Proposition 4.3. *Si $\{P_i; i \in I\}$ est une famille orthogonale de projecteurs de H dont l'image de la somme contient $H_{Z'}$ et telle que $P_i \circ Z'$ soit (pour tout i de I) une m.a. alors : (a) pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ la famille $\{P_i(Z'(u^{-1}(A - \gamma_i))); i \in I\}$ est sommable; (b) l'application $Z : A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto \sum_{i \in I} P_i(Z'(u^{-1}(A - \gamma_i))) \in H$ est une m.a. dont l'image par f est égale à Z' .*

Réciproquement, toutes les m.a. Z telles que $f(Z) = Z'$ sont de ce type.

Effectivement si, pour tout i de I , on note Z_i la m.a. image de $P_i \circ Z'$ par l'application $\gamma' \in \widehat{G}' \mapsto u(\gamma') + \gamma_i \in \widehat{G}$ il est facile de constater que la famille de m.a. $\{Z_i; i \in I\}$ vérifie les hypothèses de la Proposition 4.1 d'où les points a et b si l'on remarque que $u^{-1}(f^{-1}(A') - \gamma_i) = A'$ (pour tout A' de $\mathcal{B}_{\widehat{G}'}$).

Quant à la réciproque, considérons une m.a. Z telle que $f(Z) = Z'$. Soit ε la m.s. associée à Z et ε' son image par f . Puisque $f(\varepsilon) = \varepsilon'$, d'après la Proposition 3.2 il existe donc une m.s. ε'' qui commute avec $u(\varepsilon')$ telle que $\varepsilon'' * u(\varepsilon') = \varepsilon$ et telle que $f(\varepsilon'') = \varepsilon_{\widehat{G}'}$. De ce dernier point on déduit que $\varepsilon''(\{\gamma_i; i \in I\}) = i_{H_Z}$. Si pour tout i de I on désigne par P_i l'application $x \in H \mapsto \varepsilon''(\{\gamma_i\})(P(x)) \in H$, où P est le projecteur orthogonal de H sur H_Z , il est facile de vérifier que $\{P_i; i \in I\}$ est une famille orthogonale de projecteurs de somme P . La définition du produit de convolution de deux mesures spectrales et la définition de la mesure spectrale associée à une m.a. nous permettent d'affirmer que la famille $\{\varepsilon''(\{\gamma_i\}) \circ (u(\varepsilon'(A - \gamma_i)))(Z(\widehat{G})); i \in I\}$ donc la famille $\{P_i(Z'(u^{-1}(A - \gamma_i))); i \in I\}$

est sommable de somme $\varepsilon(A)(Z(\widehat{G})) = Z(A)$, cela pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$. Constatons enfin que $P_i \circ Z'$ est bien une m.a. car pour tout A' de $\mathcal{B}_{\widehat{G}'}$: $P_i(Z'(A')) = (\varepsilon''(\{\gamma_i\}) \circ \varepsilon'(A'))(Z(\widehat{G})) = (\varepsilon'(A'))(\varepsilon''(\{\gamma_i\})(Z(\widehat{G})))$.

5. Interpolation d'une série

Étant donné une série stationnaire $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de m.a. associée Z' nous souhaitons :

- (i) exprimer en fonction de Z' toute m.a. Z associée à une f.a.c. stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ telle que $X_n = X'_n$ pour tout n de \mathbb{Z} ;
- (ii) exprimer en fonction de Z' toute m.a. Z associée à une série stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $X_{qn} = X'_n$ pour tout n de \mathbb{Z} (q élément quelconque de \mathbb{N}^*).

Pour le premier de ces problèmes (désignant par $[x]$ la partie entière d'un réel x et par Π l'intervalle $[-\pi, \pi[$) considérons l'homomorphisme mesurable $f_1 : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda - 2\pi[\frac{\lambda+\pi}{2\pi}] \in \Pi$, dont le noyau est $\{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, et l'application $u_1 : \lambda \in \Pi \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$. Cette dernière est mesurable et vérifie : $f_1 \circ u_1 = i_{\Pi}$. Si l'on constate qu'une f.a.c. stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est telle que $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ si et seulement si la m.a. Z qui lui est associée vérifie $f_1(Z) = Z'$, il est clair que (i) revient à définir toutes les m.a. Z dont l'image par f_1 est égale à Z' , ce qui est obtenu grâce au résultat suivant, conséquence immédiate de la Proposition 4.3 :

Corollaire 5.1. *Si $\{P_k; k \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthogonale de projecteurs dont l'image de la somme contient $H_{Z'}$ et telle que, pour tout k de \mathbb{Z} , $P_k \circ Z'$ soit une m.a. alors : (a) pour tout A de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la famille d'éléments de H $\{P_k(Z'((A - 2k\pi) \cap \Pi)); k \in \mathbb{Z}\}$ est sommable ; (b) l'application $Z : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k(Z'((A - 2k\pi) \cap \Pi)) \in H$ est une m.a. telle que $f_1(Z) = Z'$. Réciproquement toutes les m.a. Z telles que $f_1(Z) = Z'$ sont de ce type.*

Quant au second problème, on établit qu'une série $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est telle que $(X_{nq})_{n \in \mathbb{Z}} = (X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ si et seulement si la m.a. Z qui lui est associée est telle que son image par l'homomorphisme mesurable $f_2 : \lambda \in \Pi \mapsto q\lambda - 2\pi[\frac{q\lambda+\pi}{2\pi}] \in \Pi$ est égale à Z' . Si l'on remarque que $f_2^{-1}(\{0\}) = \{\lambda_k; k = 0, 1, \dots, q-1\}$ où $\lambda_k = k\frac{2\pi}{q} - 2\pi[\frac{k}{q} + \frac{1}{2}]$ et que l'application $u_2 : \lambda \in \Pi \mapsto \frac{\lambda}{q} \in \Pi$ est mesurable et vérifie $f_2 \circ u_2 = i_{\Pi}$ il est facile de voir qu'une nouvelle application de la Proposition 4.3 permet de résoudre le point (ii). D'une façon plus précise, désignant, pour tout A de \mathcal{B}_{Π} , l'ensemble $\{\lambda - \lambda_k - 2\pi[\frac{\lambda - \lambda_k + \pi}{2\pi}]; \lambda \in A\}$ par $A \ominus \lambda_k$, on peut affirmer que :

Corollaire 5.2. *Si $\{P_k; k = 0, 1, \dots, q-1\}$ est une famille orthogonale de projecteurs dont l'image de la somme contient $H_{Z'}$ et telle que, pour tout k de $\{0, 1, \dots, q-1\}$, $P_k \circ Z'$ soit une m.a. alors, l'application $A \in \mathcal{B}_{\Pi} \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} P_k(Z'((A \ominus \lambda_k) \cap \Pi)) \in H$ est une m.a. dont l'image par f_2 est égale à Z' . Réciproquement toutes les m.a. Z telles que $f_2(Z) = Z'$ sont de ce type.*

Références

- [1] R. Azencott, D. Dacunha-Castelle, Séries d'observations irrégulières. Modélisation et prévision. Techniques stochastiques, Masson, Paris, 1984.
- [2] A. Boudou, Produit de mesures et produits de convolution de mesures spectrales, Publ. Lab. Statist. Probab., Université Paul-Sabatier, Toulouse 14 (2000) 1–19.
- [3] A. Boudou, Y. Romain, On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes, Statist. Probab. Lett. 59 (2002) 145–157.