Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 1007–1010
Comptes Rendus Mathematique

Géométrie différentielle

Formalité quotient

Didier Arnal [a], Najla Dahmene [b], Khaled Tounsi [c]

[a] *Université de Bourgogne, laboratoire Gevrey de mathématique physique, BP 47870, 21078 Dijon cedex, France*
[b] *Département de mathématiques, faculté des sciences de Gabes, 6029, route de Medenine, Gabes, Tunisie*
[c] *Département de mathématiques, faculté des sciences de Sfax, BP 802, 3038 Sfax, Tunisie*

Reçu le 17 février 2003 ; accepté après révision le 9 mai 2003

Présenté par Michèle Vergne

Résumé

On connait depuis longtemps l'existence de star-produits différentiels sur les variétés symplectiques. En particulier on sait, depuis le tout début de la théorie des star-produits, que les variétés de dimension 2, comme la sphère, admettent des star-produits. Cependant, on peut dire qu'on ne sait pas, même dans un cas aussi simple, construire des star-produits explicites.

Dans cette Note, on remarque que si $P \to M$ est un fibré principal de groupe structurel G admettant une connexion plate ∇ et si P est muni d'une formalité G-invariante $\mathcal{F}$, on peut définir naturellement une formalité quotient $\mathcal{F}^\vee$ sur M. Ceci nous permet de construire des formalités canoniques sur des exemples, dont les sphères, en partant de la formalité explicite de M. Kontsevich sur $\mathbb{R}^d$. On définit ainsi un star-produit « canonique » sur la sphère S^2. ***Pour citer cet article : D. Arnal et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Quotient formality. In this Note, we consider a principal fibre bundle $P \to M$ with structural group G, endowed with a flat connection. Supposing there is a G invariant formality $\mathcal{F}$ on P, we can define a quotient formality $\mathcal{F}^\vee$ on the basis M of our fibre bundle. We give a few examples, especially for the spheres S^d. If $d = 2$, this defines a canonical differential star-product on the sphere S^2. The construction of such a star-product was a classical and very old question in deformation theory. ***To cite this article: D. Arnal et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Introduction

L'étude des star-produits sur les variétés symplectiques et de Poisson remonte à [1]. L'existence de telles déformations pour les variétés de dimension 2 comme S^2 est connue depuis J. Vey [11] et Neroslavsky et Vlassov [10]. Cependant la construction d'un star-produit explicite sur S^2 reste un problème délicat, bien qu'il ait été abordé par de nombreux auteurs (par exemple dans [2,5,9] ou [3]). Pour d'autres variétés comme T^*S^n, les

Adresses e-mail : didier.arnal@u-bourgogne.fr (D. Arnal), najla.dahmene@fsg.rnu.tn (N. Dahmene), khaled.tounsi@fss.rnu.tn (K. Tounsi).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00240-1

fibrés cotangents aux variétés de Stieffel, un star-produit a été décrit très tôt (voir [1] et [8]) par passage au quotient du star-produit de Moyal sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$.

Dans [6], Kontsevich a prouvé l'existence de star-produit sur toute variété de Poisson comme sous-produit de celle de formalité $\mathcal{F}$ sur toute variété M.

Supposons maintenant que $\pi : P \to M$ soit un fibré principal de groupe structurel G admettant une connexion plate et que $\mathcal{F}$ soit une formalité G-invariante sur P. Nous montrons ici que $\mathcal{F}$ définit naturellement une formalité quotient $\mathcal{F}^\vee$ sur M. Ce résultat permet de définir des formalités explicites par exemple sur les sphères, les fibrés cotangents aux variétés de Stieffel et donc de définir des star-produits naturels sur ces variétés, pour toute structure de Poisson α. Dans le cas des fibrés cotangents aux variétés de Stieffel et pour la forme de Liouville, on retrouve le star-produit de Lichnerowicz.

2. Formalités invariantes

Soit M une variété C^∞. Une formalité $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_n$ est une application non linéaire de l'espace $T_{\mathrm{poly}}(M)$ des tenseurs complètement antisymétriques sur M vers l'espace $D_{\mathrm{poly}}(M)$ des opérateurs multidifférentiels sur M entrelaçant les champs de vecteurs canoniques donnés par le crochet de Schouten ($[\cdot,\cdot]_S$) d'une part, le cobord de Hochschild plus le crochet de Gerstenhaber ($[\cdot,\cdot]_{\mathrm{Ger}}$) d'autre part. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est donnée par une suite d'applications linéaires $\mathcal{F}_n : S^n(T_{\mathrm{poly}}(M)) \to D_{\mathrm{poly}}(M)$ homogènes au sens que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des tenseurs d'ordre $k_1, \ldots, k_n$, $\mathcal{F}_n(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$ est un opérateur m-différentiel avec $m - 2 = \sum k_i - 2n$ et symétriques en ce sens que

$$\mathcal{F}_n(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = (-1)^{k_i k_{i+1}} \mathcal{F}_n(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{i+1} \otimes \alpha_i \otimes \cdots \otimes \alpha_n).$$

Ces applications satisfont : $\mathcal{F}_0(f_1, f_2) = \mu(f_1, f_2) = f_1 f_2$, $\mathcal{F}_1(\alpha)(f_1, \ldots, f_k) = \langle \alpha, \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \rangle$ et l'équation de formalité :

$$\sum_{I \sqcup J = \{1,\ldots,n\}} \pm \big[\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I), \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)\big]_{\mathrm{Ger}} + \sum_{i \neq j} \pm \mathcal{F}_{n-1}\big([\alpha_i, \alpha_j]_S \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \breve{\alpha}_i \otimes \cdots \otimes \breve{\alpha}_j \otimes \cdots \otimes \alpha_n\big) = 0.$$

Supposons maintenant qu'un groupe de Lie G agisse sur M. On relève son action naturellement à $T_{\mathrm{poly}}(M)$ et à $D_{\mathrm{poly}}(M)$. Explicitement, si $\alpha = \sum X_1 \wedge \cdots \wedge X_k$ est un tenseur, on pose $g_*\alpha = \sum (g_* X_1) \wedge \cdots \wedge (g_* X_k)$ et on dira que α est invariant si $g_*\alpha = \alpha$ pour tout g dans G. Si D est un opérateur multidifférentiel, $(g_* D)(f_1, \ldots, f_m)|_x = D(f_1 \circ g, \ldots, f_m \circ g)|_{g^{-1}x}$ et on dira que D est invariant si $g_* D = D$ pour tout g dans G.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ une formalité sur M. On définit naturellement l'action de G sur $\mathcal{F}$ par : $(g_*\mathcal{F})_n(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = g_*(\mathcal{F}_n(g_*^{-1}\alpha_1 \otimes \cdots \otimes g_*^{-1}\alpha_n))$.

Lemme 2.1 ($g_*\mathcal{F}$ est une formalité). *Si $\mathcal{F}$ est une formalité, alors $g_*\mathcal{F}$ en est aussi une.*

Définition 2.2 (*Formalité invariante*). On dira qu'une formalité $\mathcal{F}$ est G-invariante si $g_*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ pour tout g de G.

3. Formalité quotient

Supposons que $\pi : P \to M$ soit un fibré principal de groupe structurel G et soit D un opérateur multidifférentiel G-invariant sur P. Si $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions C^∞ sur M, la fonction $D(\pi^* f_1, \ldots, \pi^* f_m)$ est G-invariante. Il existe donc une unique fonction notée $D^\vee(f_1, \ldots, f_m)$ sur M telle que $\pi^*(D^\vee(f_1, \ldots, f_m)) = D(\pi^* f_1, \ldots, \pi^* f_m)$.

Lemme 3.1 ($D^\vee$ est un opérateur multidifférentiel). *$D^\vee$ ainsi défini est un opérateur multidifférentiel sur M et on a, pour tout couple D_1, D_2 d'opérateurs G-invariants,* $[(D_1)^\vee, (D_2)^\vee]_{\mathrm{Ger}} = ([D_1, D_2]_{\mathrm{Ger}})^\vee$.

Donnons-nous maintenant une connexion ∇ du fibré principal $P \to M$. Cette connexion nous permet de relever les champs de vecteurs X sur M en des champs horizontaux $\widehat{X}$ sur P (voir par exemple [7]). Si α est un k-tenseur sur M, on peut l'écrire $\alpha = \sum X_1 \wedge \cdots \wedge X_k$ et donc le relever en un k-tenseur horizontal $\hat{\alpha} = \sum \widehat{X}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_k$ sur P.

Lemme 3.2 (Le cas plat). *Supposons que la connexion* ∇ *soit plate. Alors* : $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]_S = [\widehat{\alpha, \beta}]_S$, $\forall \alpha, \beta \in T_{\text{poly}}(M)$.

Théorème 3.3 (Formalité quotient). *Soit* $\pi : P \to M$ *un fibré principal de groupe structurel* G *muni d'une connexion plate* ∇. *Soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_n$ *une formalité* G*-invariante sur* P. *Alors les formules* :

$$\mathcal{F}_n^\vee(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \big(\mathcal{F}_n(\hat{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}_n)\big)^\vee$$

définissent une formalité $\mathcal{F}^\vee$ *sur* M *appelée formalité quotient.*

Démonstration. L'équation de formalité pour $\mathcal{F}^\vee$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{I \sqcup J = \{1,\dots,n\}} \pm\big[\mathcal{F}^\vee_{|I|}(\alpha_I), \mathcal{F}^\vee_{|J|}(\alpha_J)\big]_{\text{Ger}} + \sum_{i \neq j} \pm \mathcal{F}^\vee_{n-1}\big([\alpha_i, \alpha_j]_S \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \check{\alpha}_i \otimes \cdots \otimes \check{\alpha}_j \otimes \cdots \otimes \alpha_n\big)\\
&\quad = \sum_{I \sqcup J = \{1,\dots,n\}} \pm\big[\big(\mathcal{F}_{|I|}(\hat{\alpha}_I)\big)^\vee, \big(\mathcal{F}_{|J|}(\hat{\alpha}_J)\big)^\vee\big]_{\text{Ger}}\\
&\qquad + \sum_{i \neq j} \pm\big(\mathcal{F}_{n-1}\big(\big[\widehat{\alpha_i, \alpha_j}\big]_S \otimes \hat{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \check{\hat{\alpha}}_i \otimes \cdots \otimes \check{\hat{\alpha}}_j \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}_n\big)\big)^\vee\\
&\quad = \Bigg(\sum_{I \sqcup J = \{1,\dots,n\}} \pm\big[\mathcal{F}_{|I|}(\hat{\alpha}_I), \mathcal{F}_{|J|}(\hat{\alpha}_J)\big]_{\text{Ger}}\\
&\qquad + \sum_{i \neq j} \pm \mathcal{F}_{n-1}\big([\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j]_S \otimes \hat{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \check{\hat{\alpha}}_i \otimes \cdots \otimes \check{\hat{\alpha}}_j \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}_n\big)\Bigg)^\vee = 0.
\end{aligned}$$

4. Exemples des sphères et des fibrés cotangents

La sphère S^d est la base du fibré principal $\pi : \mathbb{R}^{d+1} - \{0\} \to S^d$ de groupe structurel $(\mathbb{R}^*_+, \cdot) : (\lambda, x) \mapsto \lambda x (\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^{d+1})$. En réalisant S^d comme la sous-variété de $\mathbb{R}^{d+1}$ formée par les y de norme 1, on peut voir un k-tenseur α sur S^d comme un tenseur de $\mathbb{R}^{d+1}$ tangent à la sphère S^d :

$$\alpha = \sum_{i_1,\dots,i_k} a^{i_1\dots i_k}(y)\partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k} = \sum_{j_1,\dots,j_k} b^{j_1\dots j_k}(y) X_{j_1} \wedge \cdots \wedge X_{j_k},$$

où les X_j sont des champs fondamentaux de l'action de $\mathrm{SO}(d+1)$ sur $\mathbb{R}^{d+1}$ (par exemple, dans l'ouvert $U = \{y \in S^d,\ \ y_{d+1} > 0\}$, on peut choisir les champs $X_j = y_j \partial_{d+1} - y_{d+1}\partial_j$, $1 \leqslant j \leqslant d$). Alors $\hat{\alpha}$ est le tenseur :

$$\hat{\alpha} = \|x\|^k \sum_{i_1,\dots,i_k} a^{i_1\dots i_k}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k} = \sum_{j_1,\dots,j_k} b^{j_1\dots j_k}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) X_{j_1} \wedge \cdots \wedge X_{j_k}.$$

D'autre part, dans [6], Kontsevich a défini sur $\mathbb{R}^{d+1}$ une formalité explicite :

$$\mathcal{F}_n(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n).$$

Cette formalité est invariante sous l'action du groupe des dilatations (voir [6]). On a donc :

Corollaire 4.1 (Formalité canonique sur la sphère). *Sur la sphère* S^d, *il existe une formalité* $\mathcal{F}^\vee$, $\mathrm{SO}(d+1)$*-invariante, quotient de la formalité de Kontsevich sur* $\mathbb{R}^{d+1}$, *c'est à dire* :

$$\mathcal{F}_n^\vee(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} w_\Gamma \big(B_\Gamma(\hat{\alpha}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}_n)\big)^\vee.$$

Ou, si $\hat{\alpha}_j = \sum_{i_1,\dots,i_k} \|x\|^k a_j^{i_1\dots i_k}(x/\|x\|)\,\partial_{i_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_k}$ *et si* $\hat{f}_k(x) = f_k(x/\|x\|)$, *alors* :

$$\mathcal{F}_n^\vee(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)(f_1,\dots,f_m)(y) = \sum_{\Gamma\in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\hat{\alpha}_1\otimes\cdots\otimes\hat{\alpha}_n)(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_m)|_y.$$

En particulier, si $d=2$, *cette formalité* $\mathcal{F}^\vee$ *définit un star-produit* SO(3)*-invariant sur* S^2 *munie de la structure symplectique définie par sa forme volume* : $\omega = y_1\,\mathrm{d}y_2\wedge\mathrm{d}y_3 + y_2\,\mathrm{d}y_3\wedge\mathrm{d}y_1 + y_3\,\mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2$.

Si $d=2$, S^2 est une variété symplectique et le star-produit :

$$u\star v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hbar^n}{n!}\mathcal{F}_n^\vee(\omega\otimes\cdots\otimes\omega)(u,v)$$

est SO(3)-invariant. G. Dito a donné dans [4] le terme $C_2^K(f,g)$ d'ordre 2 du produit de Kontsevich sur $\mathbb{R}^n$. Le calcul direct des quantités $C_2^K(\hat{y}_i,\hat{y}_j)$ donne : $C_2^K(\hat{y}_i,\hat{y}_j) = \hat{y}_i\hat{y}_j$. On en déduit que l'on a par exemple $\hat{y}_1\star\hat{y}_1 = \hat{y}_1{}^2 + \hbar^2\hat{y}_1{}^2 +$ terme en $\hbar^4 + \cdots$ et $\hat{y}_1\star\hat{y}_2 = \hat{y}_1\hat{y}_2 + \hbar\hat{y}_3 + \hbar^2\hat{y}_1\hat{y}_2 +$ terme en $\hbar^3 + \cdots$. Finalement, sur S^2, $y_1\star y_1 + y_2\star y_2 + y_3\star y_3 = 1 + \hbar^2 +$ terme en $\hbar^4 + \cdots$.

Remarquons que S^2 est aussi la base du fibré principal $\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ mais notre théorème ne s'applique pas à cette situation faute de l'existence d'une connexion plate.

Considérons maintenant les fibrés cotangents aux variétés de Stieffel décrits dans [8].

Corollaire 4.2 (Formalité sur les fibrés cotangents). *Sur les fibrés cotangents aux groupes* :

$$\mathrm{GL}(n),\ \mathrm{SL}(n),\ \mathrm{SO}(n),\ \mathrm{SU}(n),\ \mathrm{Sp}(n),\ \mathrm{SO}_0(p,q),\ \mathrm{SU}(p,q),\ \mathrm{Sp}(p,q)$$

et aux variétés de Stieffel :

$$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(p),\ \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(p),\ \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(p)\quad (p\leqslant n),\quad \mathrm{SO}_0(p,q)/\mathrm{SO}_0(p',q'),$$
$$\mathrm{SU}(p,q)/\mathrm{SU}(p',q'),\ \mathrm{Sp}(p,q)/\mathrm{Sp}(p',q')\quad (p'\leqslant p,\ q'\leqslant q),$$

il existe une formalité $\mathcal{F}^\vee$ *définie par passage au quotient de la formalité de Kontsevich* $\mathcal{F}$ *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Le star-produit qu'on en déduit lorsqu'on voit ces variétés comme des variétés symplectiques est celui de Lichnerowicz.*

Références

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Deformation theory and quantization I, II, Ann. Phys. 111 (1978) 61–110, 111–151.
[2] F. Bayen, C. Fronsdal, Quantization on the sphere, J. Math. Phys. 22 (7) (1981) 1345–1349.
[3] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley, Quantization of Kähler manifolds. I. Geometric interpretation of Berezin's quantization, J. Geom. Phys. 7 (1) (1990) 45–62.
[4] G. Dito, Kontsevich star-product on the dual of a Lie algebra, Lett. Math. Phys. 48 (4) (1999) 307–322.
[5] C. Fronsdal, Some ideas about quantization, Rep. Math. Phys. 15 (1) (1979) 111–145.
[6] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds I, Preprint, 1997. q-alg/9709040.
[7] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol. 1, Wiley, New York, 1963.
[8] A. Lichnerowicz, Construction of twisted products for cotangent bundles of classical groups and Stieffel manifolds, Lett. Math. Phys. 2 (1977) 133–143.
[9] C. Moreno, $\star$-products on some Kähler manifolds, Lett. Math. Phys. 11 (4) (1986) 361–372.
[10] O.M. Neroslavsky, A.T. Vlassov, Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 292 (1) (1981) 71–73.
[11] J. Vey, Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, Comm. Math. Helv. 50 (1975) 421–454.