Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 7–12
Comptes Rendus Mathematique

Théorie des groupes/Analyse harmonique

Conditions simpliciales de rigidité pour les relations de type II_1

Mikaël Pichot

UMPA, ENS-Lyon, UMR 5669 CNRS, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Reçu le 14 avril 2003 ; accepté après révision le 18 mai 2003

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous donnons un critère géométrique pour qu'une relation d'équivalence (à classes dénombrables) préservant une mesure de probabilité ait la propriété (T) de Kazhdan, généralisant ainsi un résultat analogue de théorie géométrique des groupes. ***Pour citer cet article : M. Pichot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Simplicial conditions for rigidity of type $\mathbf{II_1}$ equivalence relations. We give a geometric criterion for a probability measure preserving equivalence relation with countable classes to have Kazhdan's property (T). This generalizes a similar theorem in geometric group theory. ***To cite this article: M. Pichot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

1. The ideas and concepts recently introduced by Gromov [8] in geometric group theory have led to a new proof, as elegant as short, of the following theorem.

Theorem. *Let Γ be a finitely presented group and $T = \langle S, R\rangle$ be a finite triangular presentation of Γ, such that $e \notin S$ and $S = S^{-1}$. Suppose that the link L of T is connected and that the first positive eigenvalue of* (*the Laplacian on*) *L is $> 1/2$. Then Γ has Kazhdan's property* (T).

This proof has been presented by Ghys in [7]. In this Note we adapt it to type II_1 measured equivalence relations.

2. We refer to [14] for details on the theorem and its history. It is inspired by the work of Garland [6] whose main feature was to show the vanishing of certain cohomology groups associated with Bruhat–Tits buildings. First consequences concerning property (T) have then been obtained independently by Ballman and Świątkowski [2],

Adresse e-mail : mpichot@umpa.ens-lyon.fr (M. Pichot).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00253-X

Pansu [11] and Żuk [16]. The previous statement appeared in [2] and [16]. Note that before [7], proofs were based on Guichardet's lemma (that is, "$F\mathcal{H} \Rightarrow (T)$"), showing that every isometric action on an Hilbert space has a fixed point ("$F\mathcal{H}$ property") – one could also follow this approach in the equivalence relations case. Let us finally mention that, as shown by Gromov, a fixed point property much more general than $F\mathcal{H}$ is satisfied for groups considered in the theorem, cf. [8, §3].

3. Let us first recall the definition of property (T) for equivalence relations. Let $\mathcal{R}$ be a (countable classes) measured equivalence relation on a standard Borel space X, with quasi-invariant probability measure μ. (We refer to the foundational paper [4] for an introduction to the subject.) Define property (T) formally in the same way as in the group case:

Definition. $\mathcal{R}$ is said to have *Kahzdan's property* (T) if every representation weakly containing the trivial representation strongly contains it, i.e., has nontrivial invariant vector fields.

Recall that if H is a measurable field of Hilbert spaces with base space X (cf. [3]), a *representation* of $\mathcal{R}$ in H is given by a family of unitary operators $\pi(x,y): H_y \to H_x$, $(x,y) \in \mathcal{R}$, satisfying the composition properties that $\pi(x,x) = \mathrm{Id}$ and $\pi(x,z) = \pi(x,y)\pi(y,z)$ ν-almost surely (where ν is the measure on $\mathcal{R}$ defined by $\nu(A) = \int_X \# A^x \, \mathrm{d}\mu(x)$, with $A^x = A \cap (\{x\} \times X)$) and the following measurability condition: given two measurable vector fields $\xi, \eta : X \to H$, the map $(x,y) \mapsto \langle \pi(x,y)\xi_y | \eta_x \rangle_x$ is measurable. We say that ξ is *invariant* if $\pi(x,y)\xi_y = \xi_x$ for almost every $(x,y) \in \mathcal{R}$. The Definition of "weak containment" is the object of the next paragraph.

Property (T) has been introduced by Kazhdan in 1967 for discrete and Lie groups [9]. A definition for equivalence relations has been given by Moore [10], and an intermediate definition in terms of actions of discrete groups by Zimmer [15].

4. A vector field $\xi : X \to H$ is said to be (ε, F)-*invariant* if $\|\pi(x,y)\xi_y - \xi_x\| \leqslant \varepsilon$ almost surely on $F \subset \mathcal{R}$; a sequence $\xi^n : X \to H$ of (ε_n, F_n)-invariant vector fields is said to be *almost invariant* if $\varepsilon_n \to 0$ and $\nu_1(F_n) \to 1$ for any probability measure ν_1 on $\mathcal{R}$ equivalent to ν. Each of the properties (i)–(iv) in the following proposition provides a definition of the notion of almost invariant sequence of *unitary* vector fields (the main feature being to avoid mass dispersion when $n \to \infty$. It is easy to see, e.g., that if we omit the hypothesis $\|\xi^n\|_\infty \leqslant M$ in definition (iv) below, then every representation would admit almost invariant unitary fields).

Proposition. *Let $\mathcal{R}$ be a measured equivalence relation. The following properties are equivalent.*

(i) [Zimmer] *For all (or one) actions of a discrete group Γ producing $\mathcal{R}$, for all $\varepsilon > 0$ and finite subset K of Γ, there exists $\xi \in L^\infty(X,H)$, $\|\xi\|_\infty = 1$, such that for all $\gamma \in K$, $\mu\{|\langle \pi(x,\gamma x)\xi_{\gamma x} | \xi_x \rangle - 1| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \varepsilon$.*

(ii) [Moore] *There exists a sequence ξ^n of almost invariant measurable vector fields $X \to H$ such that $\|\xi^n_x\| = 1$ for almost every $x \in X$.*

(iii) [L^∞] *There exists a sequence $\xi^n \in L^\infty(X,H)$ of almost invariant measurable vector fields such that $\|\xi^n\|_\infty = 1$ and for all $\delta < 1$, there exists $\delta' > 0$ such that $\mu\{\|\xi^n_x\| \geqslant \delta\} \geqslant \delta'$.*

(iv) [L^p, $1 \leqslant p < \infty$] *There exists a sequence $\xi^n \in L^\infty(X,H)$ of almost invariant measurable vector fields such $\|\xi^n\|_p = 1$ and $\|\xi^n\|_\infty \leqslant M$ for a fixed M.*

With definition (iv) one can use standard arguments in property (T) theory to show that every relation obtained by a Borel measure preserving action of a Kazhdan group has property (T), and that the converse is true if the action is assumed to be free [12]. This result was first obtained by Zimmer [15] (under "weak mixing" additional assumption) and then by Popa [13, Theorem 4.1.7.].

5. We now recall the proof of the theorem, in the group case. Observe that concepts introduced by Gromov are implicit in our presentation – details can be found in [8] and [7]; moreover we consider only the case of orbits of Γ in H (instead of more general equivariant maps to H).

First some definitions. The *link* of $T = \langle S, R\rangle$ is the finite graph with vertices the generators S and edges the triangles in T, i.e., the couples (s, s') such that $s^{-1}s' \in S$. We assume that the link is connected. Let $\pi : \Gamma \to U(H)$ be a unitary representation of Γ. The *random walk operator* on Γ with coefficients in π is defined by $M = \frac{1}{\tau}\sum_S \tau(s)\pi(s)$ and the *Laplacian* on L by $\Delta_L f(s) = f(s) - \frac{1}{\tau(s)}\sum_{s'\sim s} f(s')$, where f is a function from S to H, $\tau(s)$ the valence of s in the link, $\sim$ the adjacency relation and $\tau = \sum_s \tau(s)$ is the number of triangles in T. We denote by λ_1 the first positive eigenvalue of Δ_L (which is easily seen to be independant of π).

Let $\xi \in H$ be a unit vector. By hypothesis for all $f : S \to H$ such that $\sum_S f(s)\tau(s) = 0$, we have $\langle \Delta_L f | f\rangle_1 \geqslant \lambda_1\langle f | f\rangle_1$, where $\langle f | g\rangle_1 = \frac{1}{\tau}\sum_S \langle f(s) | g(s)\rangle \tau(s)$. Let us take $f : s \mapsto \pi(s)\xi - M\xi$. Easy computations give $\langle f | f\rangle_1 = 1 - \langle M^2\xi | \xi\rangle$ and $\langle \Delta_L f | f\rangle_1 = 1 - \frac{1}{\tau}\sum_s\sum_{s'\sim s}\langle \pi(s')\xi | \pi(s)\xi\rangle$. Now the last equality amounts to $\langle \Delta_L f | f\rangle_1 = 1 - \langle M\xi | \xi\rangle$ by a change of variables (summing on the edges $s^{-1}s' \in S$ in the triangles (s', s)). But $M\xi$ is the barycenter in H of the points $\pi(s)\xi$, so $M\xi = \xi \Leftrightarrow \langle M\xi | \xi\rangle = 1$. Suppose that π does not contain invariant vectors. Since $\langle M^2\xi | \xi\rangle \leqslant \langle M\xi | \xi\rangle^2$, we obtain $\langle M\xi | \xi\rangle \leqslant 1/\lambda_1 - 1 < 1$. Thus every vector in the unit sphere is contracted by M at least by a factor $1/\lambda_1 - 1$ and none of them can be almost invariant. □

An adaptation of this proof to the type II_1 equivalence relations case is presented in the French version.

1. Préliminaires

Soit X un espace borélien standard. Une relation d'équivalence à classes dénombrables sur X est dite *borélienne* si elle constitue une partie borélienne de $X \times X$. Nous renvoyons à [4] pour une introduction détaillée. Rappelons simplement qu'étant données une mesure μ et une relation borélienne $\mathcal{R}$ sur X, on peut définir deux mesures sur $\mathcal{R}$ par les formules $\nu(A) = \int_X \#A^x \,\mathrm{d}\mu(x)$ et $\tilde{\nu}(A) = \int_X \#A_y \,\mathrm{d}\mu(y)$ ($A^x = A \cap (\{x\} \times X)$, $A_y = A \cap (X \times \{y\})$). On dit alors que $\mathcal{R}$ *quasi-préserve* (resp. *préserve*) μ si ν et $\tilde{\nu}$ sont absolument continue (resp. si $\nu = \tilde{\nu}$).

Définition 1.1. Une *relation d'équivalence mesurée* est la donnée d'un borélien standard X, d'une relation borélienne $\mathcal{R}$ sur X, et d'une mesure de probabilité quasi-préservée μ. Si μ est invariante et si presque toutes les classes sont infinies, on dira que $\mathcal{R}$ est *de type* II_1.

2. Triangulation des orbites d'une relation

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurée. On appelle *famille mesurable de triangles non orientés sur* $\mathcal{R}$ une partie borélienne symétrique de triplets de points de X distincts et $\mathcal{R}$-équivalents. À une telle famille T est naturellement associée une « lamination » de dimension 1 et de transversale X : une arête est présente entre x et y si et seulement si (x, y) se complète en un triangle $(x, y, z) \in T$. Les feuilles de cette lamination définissent *a priori* sur X une sous-relation de $\mathcal{R}$ et on dit que T est une *triangulation de* $\mathcal{R}$ s'il s'agit de la même relation. (Ce type de structure est couramment utilisé depuis une vingtaine d'années, cf. [1,5] par exemple.)

On dira qu'une triangulation est *finie* si la valence en chaque point $x \in X$ est uniformément majorée par une constante $\bar{\tau} < \infty$. Comme par définition chaque point de X est contenu dans un triangle (on suppose bien sûr que chaque classe contient au moins 3 points), on a

$$1 \leqslant \tau(x) \leqslant \bar{\tau}$$

presque sûrement sur X, où $\tau(x)$ est le nombre de triangles contenant x.

3. Propriété (T) de Kazhdan

Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurée, H un champ mesurable d'espaces hilbertiens de base X et π une représentation de $\mathcal{R}$ sur H. Suivant Moore [10], on dira qu'un champ de vecteurs $\xi : X \to H$ est *unitaire* si $\|\xi_x\| = 1$ presque sûrement sur X, et qu'il est (ε, F)*-invariant* si $\|\pi(x, y)\xi_y - \xi_x\| \leqslant \varepsilon$ presque sûrement sur $F \subset \mathcal{R}$. Une famille $\xi^n : X \to H$ de champs de vecteurs (ε_n, F_n)-invariants est dite *presque invariante* si $\varepsilon_n \to 0$ et $\nu_1(F_n) \to 1$ pour une mesure de probabilité ν_1 sur $\mathcal{R}$ équivalente à ν.

Définition 3.1. On dit que $\mathcal{R}$ a la *propriété* (T) *de Kazhdan* si toute représentation qui contient une famille presque invariante de champs unitaires contient des champs invariants non triviaux.

4. Représentations et marche aléatoire sur les orbites

Fixons maintenant une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de type II_1 et une triangulation finie T de $\mathcal{R}$. Soient H un champ mesurable d'espaces hilbertiens de base X et π une représentation de $\mathcal{R}$ sur H. On considère l'espace C^0 des champs mesurables $\xi : X \to H$ de carré intégrable pour le produit scalaire

$$\langle \xi | \eta \rangle_0 = \frac{1}{\tau} \int_X \langle \xi_x | \eta_x \rangle \tau(x) \, \mathrm{d}\mu(x),$$

($\tau = \int_X \tau(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ est le nombre moyen de triangles sur X) et on définit l'opérateur M_π de *marche aléatoire sur les orbites de $\mathcal{R}$ à coefficients dans π* par l'expression

$$M_\pi \xi : x \mapsto \frac{1}{\tau(x)} \sum_{(x,y) \in T} \tau(x, y) \pi(x, y) \xi_y,$$

où $\tau(x, y)$ est le nombre de triangles adjacents à l'arête (x, y) dans la triangulation. Comme $\|(M_\pi \xi)_x\|_x^2 \leqslant \frac{1}{\tau(x)} \sum_{(x,y) \in T} \tau(x, y) \|\xi_y\|_y^2$, il s'agit d'un opérateur hermitien borné $C^0 \to C^0$ de norme $\leqslant 1$.

Proposition 4.1. *Un champ unitaire ξ est invariant si et seulement si $\langle M_\pi \xi | \xi \rangle_0 = 1$. Étant donnée une famille presque invariante ξ_n de champs unitaires, on a $\langle M_\pi \xi_n | \xi_n \rangle_0 \to 1$.*

Démonstration. $(M_\pi \xi)_x$ étant le barycentre des points (pondérés) $\pi(x, y)\xi_y$ de la sphère unité de H_x, on a $\langle M_\pi \xi | \xi \rangle_0 = 1 \Leftrightarrow \|(M_\pi \xi)_x\|_x = 1 \Leftrightarrow \xi$ est $T^{(1)}$-invariant $\Leftrightarrow \xi$ est invariant.

Soit $\xi_n \in C^0$ une suite de champs unitaires (ε_n, F_n)-invariants, avec $\varepsilon_n \to 0$ et $\nu_1(F_n) \to 1$. Alors $\nu(F_n \cap T^{(1)}) \to \nu(T^{(1)})$ et $\langle M_\pi \xi_n | \xi_n \rangle_0 \to 1$ en intégrant. $\square$

5. Marche aléatoire sur le link

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence de type II_1 admettant une triangulation finie T. Étant donné $x \in X$, on considère le graphe fini L_x dont les sommets sont les points de X adjacents à x dans T et les arêtes celles de T reliant ces sommets. Le laplacien Δ_x sur les fonctions $f : L_x^{(0)} \to \mathbf{C}$ (ou à valeurs dans un champ d'espaces de Hilbert) est donné par :

$$\Delta_x f(y) = f(y) - \frac{1}{\tau(x, y)} \cdot \sum_{z \sim y} f(z),$$

où $z \sim y$ si (x, y, z) est un triangle de T.

Le *link* de T est par définition le champ L des graphes finis L_x, $x \in X$. L'ensemble $L^{(0)}$ de ses sommets s'identifie naturellement à la famille $T^{(1)} \subset \mathcal{R}$ des arêtes définies par T via $(x, y) \mapsto y \in L_x^{(0)}$. Considérons l'espace de Hilbert C^1 des fonctions mesurables $T^{(1)} \to \mathbf{C}$ (ou à valeurs dans un champ hilbertien) de carré intégrable pour le produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_1 = \frac{1}{\tau} \int_X \sum_{(x,y)\in T^{(1)}} \big\langle f(x, y)|g(x, y)\big\rangle \tau(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Comme T est finie, le champ Δ_x, $x \in X$, s'intègre en un opérateur positif borné

$$\Delta : C^1 \to C^1.$$

Si L est *connexe* (i.e., L_x est presque sûrement connexe), son noyau est l'espace des champs de la forme $f(x, y) = \xi_x$ pour un champ $\xi : X \to \mathbf{C}$ de carré intégrable sur X. Notons que $\|f\|_1 = \|\xi\|_0$. Notons également que du fait qu'il n'y a (presque sûrement) qu'un nombre fini de configurations possibles pour les graphes L_x (car $\tau(x) \leqslant \bar{\tau}$), le spectre de Δ est une partie *finie* de $[0, 2]$.

Définition 5.1. On appelle *première valeur propre de L*, et on note $\lambda_1(L)$, la première valeur propre non nulle de Δ.

Si Γ est un groupe discret agissant cocompactement sur un complexe simplicial Y de dimension 2 et si cette action est transitive sur les sommets, toute relation de type II_1 produite par Γ sur un espace X hérite d'une triangulation finie naturelle, définie par $T = X \times Y^{(2)}/\Gamma$ (action diagonale de Γ). La première valeur propre du link de T est alors la valeur propre minimale non nulle des links de Y.

6. Théorème principal

Théorème 6.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation de type* II_1 *admettant une triangulation finie de link L connexe. On suppose que* $\lambda_1(L) > 1/2$. *Alors $\mathcal{R}$ possède la propriété* (T) *de Kazhdan.*

Démonstration. Soit π une représentation de $\mathcal{R}$ ne contenant pas la représentation triviale. Etant donnée une triangulation finie T on a pour toute fonction $f : T^{(1)} \to H$ telle que $\sum_{(x,y)\in T^{(1)}} f(x, y)\tau(x, y) = 0$ pour presque tout $x \in X$,

$$\langle \Delta f|f\rangle_1 \geqslant \lambda_1 \langle f|f\rangle_1,$$

où $\lambda_1 = \lambda_1(L)$. Soit $\xi \in C^0$ un champ unitaire. Il est facile de voir que pour $f : (x, y) \mapsto \pi(x, y)\xi_y - M_\pi\xi(x)$, on a

$$\langle f|f\rangle_1 = 1 - \big\langle M_\pi^2\xi|\xi\big\rangle_0.$$

Il suffit en effet d'intégrer l'égalité $\langle f_x|f_x\rangle_{L_x^{(0)}} = \tau(x) - \langle M_\pi^2\xi_x|\xi_x\rangle_x\tau(x)$, où par définition $\langle f_x|g_x\rangle_{L_x^{(0)}} = \sum_{(x,y)\in T^{(1)}}\langle f(x, y)|g(x, y)\rangle\tau(x, y)$. D'autre part un calcul à x fixé montre que $\langle \Delta_x f_x|f_x\rangle_{L_x^{(0)}} = \tau(x) - \sum_{(x,y)\in T^{(1)}}\sum_{(x,z)\sim(x,y)}\langle\pi(y, z)\xi_z|\xi_y\rangle_y$. Il en résulte, après intégration sur X et changement de variable $\int_X \sum_{(x,y)\in T^{(1)}} \cdots \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \sum_{(x,y)\in T^{(1)}} \cdots \mathrm{d}\mu(y)$, que l'on a

$$\langle \Delta f|f\rangle_1 = 1 - \langle M_\pi\xi|\xi\rangle_0.$$

Or $\langle M_\pi^2\xi|\xi\rangle_0 \leqslant \langle M_\pi\xi|\xi\rangle_0^2$ et $\langle M_\pi\xi|\xi\rangle_0 \neq 1$, donc

$$\langle M_\pi\xi|\xi\rangle_0 \leqslant 1/\lambda_1 - 1 < 1,$$

d'où le résultat. □

Remarque. Nous reprenons ici implicitement des concepts introduits par Gromov [8] (en nous restreignant aux orbites de $\mathcal{R}$ sur H). Notamment la quantité $\langle \Delta f \mid f \rangle_1 = 1 - \langle M_\pi \xi \mid \xi \rangle_0$ est l'énergie de l'orbite de ξ relativement à la marche aléatoire M_π en un pas, et $\langle f \mid f \rangle_1 = 1 - \langle M_\pi^2 \xi \mid \xi \rangle_0$ est l'énergie de cette orbite relativement à la marche en deux pas (cf. [8] et [7] pour plus de détails).

Remerciements

Je remercie sincèrement Damien Gaboriau pour son soutien et ses conseils, ainsi qu'Étienne Ghys pour de passionnantes discussions.

Références

[1] S. Adams, Trees and amenable equivalence relations, Ergodic Theory Dynamical Systems 10 (1) (1990) 1–14.
[2] W. Ballman, J. Świątkowski, On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes, Geom. Funct. Anal. 7 (4) (1997) 615–645.
[3] J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann), Gauthier-Villars, Paris, 1969. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.
[4] J. Feldman, C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I, Trans. Amer. Math. Soc. 234 (2) (1977) 289–324.
[5] D. Gaboriau, Invariants L^2 de relations d'équivalence et de groupes, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 95 (2002) 93–150.
[6] H. Garland, p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups, Ann. of Math. (2) 97 (1973) 375–423.
[7] É. Ghys, Groupes aléatoires [d'après Misha Gromov,...], Séminaire Bourbaki, Exp. No. 916 (2003).
[8] M. Gromov, Random walk in random groups, Prépublication IHÉS, à paraître dans Geom. Funct. Anal., 2003.
[9] D. Kazhdan, Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Func. Anal. Appl. 1 (1967).
[10] C. Moore, Ergodic theory and von Neumann algebras, in: Operator Algebras and Applications, Part 2 (Kingston, Ontario, 1980), American Mathematical Society, Providence, RI, 1982, pp. 179–226.
[11] P. Pansu, Formule de Matsushima, de Garland, et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles, Bull. Soc. Math. France 126 (1) (1998) 107–139.
[12] M. Pichot, Thèse, en préparation.
[13] S. Popa, Correspondences, Preprint, Institul National Pentru Creatie Stiintifica si Technica, 1986.
[14] A. Valette, Nouvelles approches de la propriété (T) de Kazhdan, Séminaire Bourbaki, Exp. No. 913 (2002/2003).
[15] R. Zimmer, Ergodic Theory and Semi-Simple Groups, Birkhäuser, Basel, 1984.
[16] A. Żuk, La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 323 (5) (1996) 453–458.