

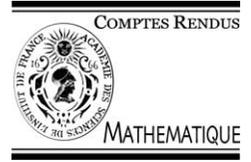


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 991–996



## Équations aux dérivées partielles

# Une estimation de type Aronson–Bénilan

Emmanuel Chasseigne

Université de Tours, parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Reçu et accepté le 13 mai 2003

Présenté par Haïm Brezis

---

### Résumé

Nous considérons l'équation  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , où  $\varphi \in C^3(0, \infty)$  est croissante. Sous l'hypothèse  $v \cdot s\varphi''(s)/\varphi'(s) \geq \gamma$  pour un  $\gamma > 0$  et  $v \in \{-1; 1\}$ , nous montrons l'estimation  $v \cdot du/dt \geq -u/\gamma t$ . Ce résultat améliore les estimations donnée par M.G. Crandall et M. Pierre (dans *J. Funct. Anal.* 45 (1982) 194–212) pour cette équation. **Pour citer cet article :** *E. Chasseigne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003)*.

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**An Aronson–Bénilan estimate.** We consider the equation  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , where  $\varphi \in C^3(0, \infty)$  is increasing. Under the condition  $v \cdot s\varphi''(s)/\varphi'(s) \geq \gamma$  for some  $\gamma > 0$  and  $v \in \{-1; 1\}$ , we prove the estimate  $v \cdot du/dt \geq -u/\gamma t$ . This result improves the estimates given by M.G. Crandall and M. Pierre (in *J. Funct. Anal.* 45 (1982) 194–212) for this equation. **To cite this article :** *E. Chasseigne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003)*.

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

### Abridged English version

In [1], Aronson and Bénilan show an estimate for the equation  $u_t = \Delta(u^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ : any solution in  $\mathbb{R}^N$  satisfies:

$$\frac{u_t}{u} \leq \frac{1}{(1-\alpha)t}, \quad (1)$$

and a similar bound from below holds also under some conditions. These bounds are in fact estimates of the speed of the semi-group  $u(t) = e^{t\mathcal{A}}u_0$ , generated by  $\mathcal{A}(u) := -\Delta(u^\alpha)$  and were used by various authors to derive positivity properties, and regularity of the free-boundaries when  $\alpha > 1$  (we refer to the survey papers [5] and [7] for further references on the subject).

---

Adresse e-mail : [echasseigne@univ-tours.fr](mailto:echasseigne@univ-tours.fr) (E. Chasseigne).

Crandall and Pierre [2,3] have extended these estimates to a more general framework including the equation  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , under some hypothesis on  $\varphi$ : if there exists  $\nu \in \{-1; 1\}$  and  $m > 0$  such that  $m(\varphi')^2 \leq \nu(\varphi \cdot \varphi'')$ , the following estimate holds for solutions:

$$\nu \cdot \frac{du}{dt} \geq -\frac{1}{mt} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}. \tag{2}$$

In the case  $\nu = 1$  (which corresponds to convex functions  $\varphi$ ), the hypothesis implies that  $\varphi(u)/\varphi'(u) \leq (1 - m)u$ , which leads to the estimate

$$\frac{u_t}{u} \geq -\frac{1 - m}{mt}. \tag{3}$$

Unfortunately, in the concave case  $\nu = -1$ , (2) does not allow for a direct estimate of  $u_t/u$ , unless we add the condition  $-\varphi \cdot \varphi''/(\varphi')^2 \leq M$  for some  $M > 0$ . In this last case, we obtain:

$$\frac{u_t}{u} \leq \frac{1 + M}{mt}. \tag{4}$$

The aim of this Note is to obtain a direct estimate of  $u_t/u$  for the equation  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , that does not involve the ratio  $\varphi(u)/\varphi'(u)$ . Moreover, our hypotheses are a little bit more general than those in [3], and our result improves especially the concave case. Our method is also different, based on the equation satisfied by  $u_t/u$ , as in [1].

We assume in this Note that the function  $\varphi$  belongs to the class  $\mathcal{F} = \{\varphi \in C^3(0, \infty), \varphi' > 0\}$ . We deal with limit solutions of

$$\frac{du}{dt} = \Delta\varphi(u) \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \tag{5}$$

where  $\Omega$  is bounded and regular, or  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . These solutions are obtained as limits of classical solutions to the regularized Cauchy–Dirichlet problem:

$$\begin{cases} u_t = \Delta\varphi(u) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varepsilon & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

with  $\varepsilon > 0, u_0 \in C_\varepsilon^\infty(\bar{\Omega}) = \{u_0 \geq \varepsilon, u_0 - \varepsilon \in C_0^\infty(\bar{\Omega})\}$ . It is well known that such solutions of (6) do exist and that they are uniquely determined by  $u_0$  and  $\varepsilon$  (see [4]). Then here is our result:

**Theorem 0.1.** *Let  $\varphi \in \mathcal{F}, \nu \in \{-1; 1\}$  and assume there exists a  $\gamma > 0$  such that*

$$\gamma \leq \nu \cdot \frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)}. \tag{7}$$

*Then any limit solution  $u$  of (5) satisfies the estimate*

$$\nu \cdot \frac{du}{dt} \geq -\frac{u}{\gamma \cdot t} \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \tag{8}$$

In the model case  $\varphi(u) = u^\alpha$ , we recover the results of [1], but the theorem applies also to functions like  $\varphi(u) = (\arctan u)^\alpha, 0 < \alpha < 1$ . Also, the case  $\varphi(u) = \ln(u)$  is allowed which gives  $\gamma = 1, \nu = -1$  (hence we recover a result of [6]). This last example cannot be dealt with the method of [3] since the ratio  $\varphi \cdot \varphi''/(\varphi')^2$  degenerates near the origin.

**1. Introduction**

Dans [1], Aronson et Bénilan montrent une estimation de type semi-groupe homogène pour l'équation  $u_t = \Delta(u^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  : toute solution de cette équation dans  $\mathbb{R}^N$  vérifie

$$\frac{u_t}{u} \leq \frac{1}{(1 - \alpha)t}, \tag{9}$$

des bornes inférieures étant également obtenues. Ce sont en fait des estimations de la vitesse du semi-groupe  $u(t) = e^{t\mathcal{A}}u_0$ , engendré par  $\mathcal{A}(u) := -\Delta(u^\alpha)$ , puisque l'on obtient une estimation de  $d/dt(\ln(u))$ . Ce type d'estimation permet de déduire des propriétés qualitatives des solutions telles que positivité, régularité des frontières libres quand  $\alpha > 1$ , etc. Nous renvoyons le lecteur aux articles généraux de Peletier [5] et Vazquez [7] pour plus d'explications et de références à ce sujet.

Crandall et Pierre [2,3] ont ensuite étendu ces estimations, entre autre à l'équation  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , sous des hypothèses assez générales sur  $\varphi$  : s'il existe  $v \in \{-1; 1\}$  et  $m > 0$  tels que  $m(\varphi')^2 \leq v(\varphi \cdot \varphi'')$ , alors on a l'estimation

$$v \cdot \frac{du}{dt} \geq -\frac{1}{mt} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}. \tag{10}$$

En fait, dans le cas  $v = 1$  (qui correspond à  $\varphi$  convexe), la borne inférieure sur  $\varphi \cdot \varphi''/(\varphi')^2$  implique que  $\varphi(u)/\varphi'(u) \leq (1 - m)u$ , ce qui entraîne

$$\frac{u_t}{u} \geq -\frac{1 - m}{mt}. \tag{11}$$

Ainsi, dans le cas modèle on a  $m = (\alpha - 1)/\alpha > 0$  (avec  $\alpha > 1$ ), ce qui redonne une estimation bien connue pour les milieux poreux. Malheureusement, dans le cas  $v = -1$  (qui correspond à la diffusion rapide  $0 < \alpha < 1$ ), (10) ne donne pas une estimation directe de  $u_t/u$ , sauf si nous imposons en outre  $-\varphi \cdot \varphi''/(\varphi')^2 \leq M$  pour un  $M > 0$ . Dans ce cas, l'estimation obtenue prend la forme :

$$\frac{u_t}{u} \leq \frac{1 + M}{mt}. \tag{12}$$

Notre but ici est donc d'obtenir directement une estimation de  $u_t/u$  pour l'équation  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , sans passer par le rapport  $\varphi(u)/\varphi'(u)$ . Nos hypothèses sont un peu plus générales que celles de [3], et notre résultat apporte une amélioration surtout dans le cas concave. La méthode que nous employons est également différente, fondée sur l'équation satisfaite par  $u_t/u$ , comme dans [1].

**2. Enoncé du résultat et commentaires**

Nous supposons dans cette Note que la fonction  $\varphi$  appartient à la classe générale suivante :

$$\mathcal{F} = \{\varphi \in C^3(0, \infty), \varphi' > 0\},$$

et nous étudions les solutions limites positives (au sens large) de l'équation

$$\frac{du}{dt} = \Delta\varphi(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{13}$$

où  $\Omega$  est borné régulier ou  $\mathbb{R}^N$ . Nous ne nous intéressons pas ici aux conditions d'existence de telles solutions, qui peuvent impliquer la fonction  $\varphi$  et la donnée initiale éventuelle.

En revanche, par solution limite, on entend toute solution distribution obtenue comme limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = \Delta\varphi(u) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varepsilon & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

où  $u_0 \in C_\varepsilon^\infty(\overline{\Omega}) = \{u_0 \geq \varepsilon, u_0 - \varepsilon \in C_0^\infty(\overline{\Omega})\}$ . On sait que ce problème régularisé admet des solutions régulières, uniquement déterminées par  $u_0$  et  $\varepsilon$  (voir par exemple [4]). Voici notre résultat, mis sous une forme similaire à celle de [3] (le cas  $\nu = -1$  correspond à des  $\varphi$  concaves et  $\nu = +1$  au cas convexe) :

**Théorème 2.1.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{F}$ ,  $\nu \in \{-1; 1\}$  et supposons qu’il existe  $\gamma > 0$  tel que*

$$\gamma \leq \nu \cdot \frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)}. \tag{15}$$

Alors toute solution limite  $u$  de (13) vérifie l’estimation :

$$\nu \cdot \frac{du}{dt} \geq -\frac{u}{\gamma \cdot t} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \tag{16}$$

Donnons tout d’abord quelques exemples de fonctions pour lesquelles le Théorème 2.1 fournit des estimations. L’exemple typique est fourni par la fonction  $\varphi(u) = u^\alpha$ ,  $\alpha \neq 1$ , pour laquelle  $\gamma = |\alpha - 1|$ , ce qui redonne le résultat de [1].

La fonction  $\varphi(u) = \arctan(u)$  ne convient pas car linéaire à l’origine (ce qui entraîne  $\gamma = 0$ ), mais une petite perturbation est possible, par exemple  $\varphi(u) = \arctan(u)^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Le choix  $\varphi(u) = \ln(u)$  nous fournit un exemple de fonction  $\varphi$  qui n’est pas continue jusqu’à l’origine. Néanmoins on obtient l’estimation (16) avec  $\gamma = 1$  et  $\nu = -1$  pour les solutions limites. Signalons que dans ce cas particulier, des conditions de non-intégrabilité sur  $u_0$  sont nécessaires pour avoir l’existence d’une solution en dimension  $N = 2$  (voir [6]).

Expliquons maintenant en quoi nos hypothèses sont un peu plus générales que celles de [3]. Dans le cas concave, l’hypothèse faite dans [3] :  $m(\varphi')^2 \leq -(\varphi \cdot \varphi'')$  entraîne :  $(\varphi/\varphi')' \geq m + 1$ . On obtient donc

$$\frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} \geq \frac{m}{m + 1}, \tag{17}$$

ce qui redonne notre hypothèse avec  $\gamma = m/(m + 1)$ . De plus, en reprenant l’exemple  $\varphi(u) = \ln(u)$ , on a un exemple de fonction concave qui n’entre pas dans le cadre de [3], mais que nous pouvons traiter ici :

$$\varphi(u) = \ln(u) \Rightarrow \inf \left\{ -\frac{\varphi(u) \cdot \varphi''(u)}{\varphi'(u)^2} \right\} = -\infty \quad \text{mais} \quad \inf \left\{ -\frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} \right\} = 1. \tag{18}$$

Signalons tout de même que les estimations de [3] fonctionnent dans un cadre semi-groupe bien plus général que celui que nous traitons ici.

### 3. Preuve du Théorème 2.1

La démonstration du théorème procède en plusieurs étapes. On commence comme dans [1] par former l’équation satisfaite par la variable  $p = u_t/u$ .

**Lemme 3.1.** *Soit  $u$  une solution régulière et positive de  $u_t = \Delta\varphi(u)$ . Alors  $p = u_t/u$  vérifie :*

$$\mathcal{L}(p) \equiv p_t - \varphi'(u)\Delta p - 2\mathbf{A}(u)\nabla u \nabla p - p^2 \left[ \frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} \right] - \mathbf{B}(u)|\nabla u|^2 p = 0, \tag{19}$$

où

$$\mathbf{A}(u) = \left[ \varphi''(u) + \frac{\varphi'(u)}{u} \right], \quad \mathbf{B}(u) = \left[ \frac{\varphi''(u)}{u} - \frac{\varphi''^2(u)}{\varphi'(u)} + \varphi'''(u) \right]. \tag{20}$$

**Démonstration.** On utilise d’abord les identités suivantes :  $p = (\Delta\varphi(u))/u$ ,  $p_t = (\Delta(u_t\varphi(u)))/u - p^2$ , ce qui donne

$$p_t = p\Delta\varphi'(u) + 2\frac{\nabla\varphi'(u)\nabla u_t}{u} + \varphi'(u)\frac{\Delta u_t}{u} - p^2. \tag{21}$$

En utilisant de plus les formules :  $\nabla u_t = p\nabla u + u\nabla p$ , et  $\Delta u_t = p\Delta u + u\Delta p + 2\nabla u\nabla p$ , on obtient ainsi

$$p_t = \varphi'(u)\Delta p + 2\nabla u\nabla p \left[ \varphi''(u) + \frac{\varphi'(u)}{u} \right] + \mathbf{C}(u) = 0, \tag{22}$$

avec  $\mathbf{C}(u) = p\Delta(\varphi'(u)) + 2\frac{\varphi''(u)}{u}p|\nabla u|^2 + \frac{\varphi'(u)}{u}p\Delta u - p^2$ . En utilisant les relations

$$\varphi'(u)\Delta u = up - \varphi''(u)|\nabla u|^2, \quad \Delta(\varphi'(u)) = \varphi'''(u)|\nabla u|^2 + \varphi''(u)\Delta u, \tag{23}$$

on aboutit à  $\mathbf{C}(u) = p|\nabla u|^2(\varphi''(u)/u + \varphi'''(u) - \varphi''(u)^2/\varphi'(u)) + p^2u\varphi''(u)/\varphi'(u)$ , ce qui donne exactement (19). □

Dans la suite, on note  $K(a, b) = \sup\{\mathbf{B}(u), a \leq u \leq b\}$ , qui est fini pour tout  $0 < a \leq b < \infty$  puisque  $\varphi \in C^3(0, \infty)$ . Nous allons maintenant montrer l’estimation voulue sur un petit intervalle de temps pour le problème non dégénéré (14).

**Lemme 3.2.** Soit  $\varphi \in \mathcal{F}$ , satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1, et soient  $c > 1/\gamma$ ,  $\varepsilon > 0$  fixés. On note  $u_\varepsilon$  la solution de (14) avec  $u_0 \in C^\infty_\varepsilon(\bar{\Omega})$ . Alors il existe un temps  $t_0(c, \gamma, M, K)$ , avec  $K = K(\varepsilon, \max u_0)$ ,  $M = \max_{Q_T} |\nabla u_\varepsilon|^2$  tel que :

$$v \cdot \frac{du_\varepsilon}{dt} \geq -\frac{cu_\varepsilon}{t}, \quad \text{pour tout } t \in (0, t_0). \tag{24}$$

**Démonstration.** Supposons  $v = -1$  pour fixer les idées et notons tout d’abord que le problème (14) admet une unique solution régulière pour tout  $u_0 \in C^\infty_0(\Omega)$  et tout  $\varepsilon > 0$  [4]. Nous cherchons une sur-solution de (19) de la forme  $p^*(x, t) = c/t$ , ce qui donne :

$$\mathcal{L}(p^*) = -\frac{c}{t^2} - \frac{c^2}{t^2} \left[ \frac{u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} \right] - \frac{c}{t} \mathbf{B}(x, t) |\nabla u|^2. \tag{25}$$

Puisque  $\varepsilon \leq u_\varepsilon \leq \max u_0$  (par principe de maximum), il est clair que  $\mathbf{B}(u) \leq K$ , qui est fini. Ainsi,

$$\mathcal{L}(p^*) \geq -\frac{c}{t^2} + \gamma \frac{c^2}{t^2} - MK \cdot \frac{c}{t}. \tag{26}$$

La sur-solution n’est donc pas globale, mais néanmoins, puisque  $c > 1/\gamma$ , il existe un temps  $t_0 = t_0(c, \gamma, M, K)$  tel que  $\mathcal{L}(p^*) \geq 0$ . Plus précisément,  $t_0 = (\gamma c - 1)/(MK) > 0$ . Ainsi,  $p^*$  est une sur-solution du problème sur  $(0, t_0)$  avec valeur  $+\infty$  en  $t = 0$ . De plus, puisque  $u_\varepsilon = \varepsilon$  sur le bord,  $p_\varepsilon = 0 < p^*$  sur  $\partial\Omega \times (0, t_0)$ . Donc

$$p_\varepsilon = \frac{\partial_t u_\varepsilon}{u_\varepsilon} \leq p^* = \frac{c}{t} \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_0), \tag{27}$$

ce qui donne bien (24) dans le cas  $v = -1$ . Le cas  $v = 1$  se traite de la même façon, en cherchant une sous-solution de la forme  $p^* = -c/t$ . □

Nous en venons maintenant à la démonstration de notre résultat :

**Preuve du Théorème 2.1.** Il est clair que toute solution régulière  $u$  de (13) peut être approchée par une suite  $u_n$  du problème (14) avec  $\varepsilon = 1/n$  vérifiant  $\max_{Q_T} |\nabla u_n|^2 \leq M(u_0, n, \Omega) = M_n < \infty$  et  $K_n = K(1/n, \max u_0) < \infty$ . Nous appliquons alors le Lemme 3.2 : pour tout  $c > 1/\gamma$ , il existe un temps  $t_0(c, \gamma, M_n, K_n) > 0$  tel que

$$v \cdot \frac{du_n}{dt} \geq -\frac{cu_n}{t} \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_0). \quad (28)$$

Considérons maintenant la fonction  $v_n(x, t) = u_n(x, t + t_0/2)$ . Alors  $v_n$  est une solution régulière de l'équation avec  $\max_{Q_{T-t_0/2}} |\nabla v_n|^2 \leq M_n$ . De plus, la même borne  $K_n$  reste valable pour  $\mathbf{B}(v_n)$  sur  $[0, T - t_0/2]$  puisque l'on a également  $1/n \leq v \leq \max u_0$ . Notons que  $v_n(0) = u_n(t_0/2) \geq 1/n$  par principe de maximum et que  $v_n(0) \in C_{1/n}^\infty(\overline{\Omega})$ . Donc la même estimation est valable pour  $v_n$  sur  $(0, t_0)$ . Cela montre que (28) est en fait valable pour  $u_n$  sur tout l'intervalle  $(0, 3t_0/2)$ . Par une itération immédiate sur des intervalles de temps de longueur fixe  $t_0$ , on en déduit

$$v \cdot \frac{du_n}{dt} \geq -\frac{cu_n}{t} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (29)$$

Puisque  $c > 1/\gamma$  est arbitraire, nous passons à la limite quand  $c \rightarrow 1/\gamma$  pour obtenir l'estimation (16) sur chaque  $u_n$ . Finalement, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , nous obtenons la même estimation globale pour  $u$ , ce qui termine la preuve du Théorème 2.1.  $\square$

## Références

- [1] D.G. Aronson, P. Bénilan, Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans  $\mathbb{R}^N$ , C. R. Acad. Sci. Paris 288 (1979) 103–105.
- [2] M.G. Crandall, M. Pierre, Regularizing effects for  $u_t = \Delta\varphi(u)$ , Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982) 159–168.
- [3] M.G. Crandall, M. Pierre, Regularizing effects for  $u_t = A\varphi(u)$  in  $L^1$ , J. Funct. Anal. 45 (1982) 194–212.
- [4] O.A. Ladyzhenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, in: Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 23, 1968.
- [5] L.A. Peletier, The porous media equation, Applications of nonlinear analysis in the physical sciences, Pap. Workshop, Bielefeld 1979, 1981, pp. 229–241.
- [6] J.L. Vazquez, Nonexistence of solutions for nonlinear heat equations of fast-diffusion type, J. Math. Pures Appl. 71 (1992) 503–526.
- [7] J.L. Vazquez, An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation, in: Shape Optimization and free Boundaries, Proc. NATO ASI, Sémin. Math. Supér., Montréal/Canada 1990, in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C, Vol. 380, 1992, pp. 347–389.