

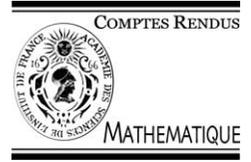


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 371–374



Algèbre

# Relèvement géométrique de la base canonique et involution de Schützenberger

Sophie Morier-Genoud

Département de mathématiques, Université Claude Bernard Lyon I, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 17 juillet 2003 ; accepté le 24 juillet 2003

Présenté par Michel Duflo

---

## Résumé

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semisimple simplement connexe, et  $\mathcal{B}_V$  la base canonique d'un module de Weyl  $V$  de  $G$ . On calcule explicitement en terme de paramétrisation l'action du plus long élément du groupe de Weyl sur  $\mathcal{B}_V$ . On utilise pour cela les résultats de Berenstein et Zelevinski (Invent. Math. 82 (2001) 77–128) sur le relèvement géométrique. **Pour citer cet article :** *S. Morier-Genoud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Geometrical lifting of the canonical base and Schützenberger involution.** Let  $G$  be a complex simply connected semisimple Lie group, and let  $\mathcal{B}_V$  be the canonical base of a Weyl module  $V$  of  $G$ . We calculate explicitly the action of the longest element  $w_0$  of the Weyl group on  $\mathcal{B}_V$  in terms of parametrizations. The method is based on results of Berenstein and Zelevinski (Invent. Math. 82 (2001) 77–128) on the geometric lifting. **To cite this article:** *S. Morier-Genoud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semisimple simplement connexe et  $B$  un sous groupe de Borel. L'algèbre  $R$  des fonctions régulières sur la variété de drapeau  $G/B$  est engendrée par une base dite base canonique duale, [7], qui possède des propriétés remarquables de compatibilités avec certaines filtrations. Cette base admet deux systèmes de paramétrisations, [3], la paramétrisation de Lusztig, et la paramétrisation en cordes. On introduit en 2.3, un morphisme  $\Phi_\lambda$  qui, à un automorphisme de diagramme près, correspond à l'action de  $w_0$ , où  $w_0$  est l'élément de longueur maximale du groupe de Weyl. Ce morphisme  $\Phi_\lambda$  préservant la base canonique, on cherche à l'exprimer en terme de paramétrisations. Le résultat obtenu généralise à tout groupe  $G$  et pour tout choix d'une décomposition réduite de  $w_0$  le résultat de [2, §8]. Un résultat remarquable est que pour un choix particulier des paramétrisations, on obtient une expression affine. La combinatoire de la base canonique généralise celle des tableaux de Young. Dans cette généralisation, le résultat présenté peut-être vu comme un analogue de l'involution

---

Adresse e-mail : [morier@igd.univ-lyon1.fr](mailto:morier@igd.univ-lyon1.fr) (S. Morier-Genoud).

de Schützenberger. La méthode utilisée est celle du relèvement géométrique, objet introduit et utilisé dans une série d’articles, [1,3], qui établit un lien entre les combinatoires de la base canonique et la géométrie de certaines variétés totalement positives. A l’aide de ce résultat, on montre dans [5] que l’on peut réaliser les cônes de Lusztig en termes de paramétrisations d’une partie de la base canonique. Une autre application de ce résultat concerne une généralisation de [4] et permet en particulier de fournir explicitement des dégénérescences semi-toriques pour les variétés de Richardson. Ces résultats sont plus largement développés dans [8].

**2. Notations et préliminaires**

**2.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semisimple et simplement connexe. On fixe un tore  $T$  et un sous groupe de Borel  $B$  de  $G$ . Soit  $N$  le radical unipotent de  $B$ . On note  $B^-$  le sous groupe de Borel opposé et  $N^-$  son radical unipotent. On note respectivement  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}^-$ , les  $\mathbb{C}$ -algèbres de Lie de  $G, T, N, N^-$ . On a la décomposition triangulaire  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ . Soit  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une base du système de racines correspondant à cette décomposition,  $n$  étant le rang de  $\mathfrak{g}$ . On note  $P$  le réseau des poids engendré par les poids fondamentaux  $\varpi_i, 1 \leq i \leq n$ , et  $P^+ := \sum_i \mathbb{N} \cdot \varpi_i$  le semigroupe des poids entiers dominants. La matrice de Cartan associée à  $\mathfrak{g}$  est notée  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On désigne par  $W$  le groupe de Weyl, engendré par les réflexions  $s_i$  correspondant aux racines simples  $\alpha_i$ . Un mot réduit pour  $w \in W$  est une suite d’indices  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)$  telle que  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ , où  $\ell(w) := l$  désigne la longueur de  $w$ . Soit  $w_0$  l’unique élément de  $W$  de longueur maximale. On pose  $N := \ell(w_0)$ .

**2.2.** L’algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , notée  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , est engendrée par les générateurs  $E_i, F_i, H_i, 1 \leq i \leq n$ , et les relations de Serre. On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ , et  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$  les opérateurs de Kashiwara, [7,6]. Soit  $\lambda$  dans  $P^+$ , on note  $V(\lambda)$  le module de Weyl de plus haut poids  $\lambda$  et  $v_\lambda$  un vecteur de plus haut poids de  $V(\lambda)$ . On note  $\mathcal{B}(\lambda) := V(\lambda) \cap \mathcal{B}$  qui est une base, dite canonique, de  $V(\lambda)$ . On désigne par  $v_\lambda^{\text{low}}$  le vecteur de  $V(\lambda)$  de plus bas poids, appartenant à  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit de  $w_0$ . On adopte les notations de [3, §3], on note  $b_i : \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathcal{B}$  la bijection correspondant à la paramétrisation de Lusztig de la base canonique et  $c_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  la paramétrisation en cordes de la base  $\mathcal{B}$ . On pose  $\mathcal{C}_i := c_i(\mathcal{B})$  et  $\mathcal{C}_i(\lambda) := c_i(\mathcal{B}(\lambda))$ . Pour deux mots réduits  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$ , on définit les applications de changement de paramétrisations  $R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'} = (b_{\mathbf{i}'})^{-1} \circ b_{\mathbf{i}} : \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  et  $R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'} = c_{\mathbf{i}'} \circ (c_{\mathbf{i}})^{-1} : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i'}$ .

**2.3.** Soit  $\omega$  l’automorphisme de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  défini sur les générateurs par  $\omega(E_i) = F_i, \omega(F_i) = E_i, \omega(H_i) = -H_i$ . Pour tout  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module  $V$ , soit  $V^\omega$  le module tordu par l’action de  $\omega$ , i.e. comme espace vectoriel  $V \simeq V^\omega$  et muni de l’action  $u * v = \omega(u)v, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), v \in V$ . Si  $V$  est un module simple, alors  $V^\omega$  l’est aussi. Ainsi pour tout  $\lambda \in P^+$ , il existe un  $\lambda^\omega \in P^+$  tel que  $V(\lambda)^\omega$  est isomorphe à  $V(\lambda^\omega)$ . Il existe donc un isomorphisme  $\Phi_\lambda$  d’espaces vectoriels entre  $V(\lambda)$  et  $V(\lambda^\omega)$  tel que  $\Phi_\lambda(uv) = \omega(u)\Phi_\lambda(v), u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), v \in V(\lambda)$ . Clairement,  $\Phi_\lambda$  envoie un vecteur de plus haut poids sur un vecteur de plus bas poids. D’après le lemme de Schur, ce morphisme est unique à une constante multiplicative près. On peut choisir la constante pour avoir  $\Phi_\lambda(v_\lambda) = v_{\lambda^\omega}^{\text{low}}$ . Par [7, §21], on a les propriétés suivantes :

**Proposition 2.1.** On a (i)  $\lambda^\omega = -w_0(\lambda)$ , (ii)  $\Phi_\lambda(\mathcal{B}_\lambda) = \mathcal{B}_{\lambda^\omega}$ , (iii) pour tout  $1 \leq i \leq n, \Phi_\lambda \tilde{f}_i = \tilde{e}_i \Phi_\lambda$ .

**3. Relèvement géométrique**

Dans cette partie on s’intéresse au relèvement géométrique de l’application  $\Phi_\lambda$ . En utilisant les résultats de [3], nous donnons une formule explicite pour l’application  $b_i^{-1} \Phi_\lambda c_i^{-1}$  qui donne la paramétrisation de Lusztig  $t' = (t'_1, \dots, t'_N)$  de l’élément  $\Phi_\lambda(b)$  en fonction de la paramétrisation en corde  $t = (t_1, \dots, t_N)$  d’un élément  $b$  de la base canonique.

**3.1.** Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on note  $\varphi_i : SL_2 \hookrightarrow G$  l’injection canonique correspondant à la racine simple  $\alpha_i$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on considère les sous-groupes à un paramètre de  $G$  définis par

$$x_i(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_i(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}; \quad t^{\alpha_i^\vee} = \varphi_i \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}^*.$$

Les  $x_i(t)$  (resp.  $y_i(t), t^{\alpha_i^\vee}$ ), engendrent  $N$  (resp.  $N^-, H$ ). On a les relations de commutation suivantes :

$$t^{\alpha_i^\vee} x_j(t') = x_j(t^{a_{ij}} t') t^{\alpha_i^\vee}, \quad t^{\alpha_i^\vee} y_j(t') = y_j(t^{-a_{ij}} t') t^{\alpha_i^\vee}. \tag{1}$$

On définit deux antiautomorphismes involutifs de  $G$ ,  $x \mapsto x^T$ , appelé transposition, et  $x \mapsto x^t$ , appelé inversion, par :

$$x_i(t)^T = y_i(t), \quad y_i(t)^T = x_i(t), \quad (t^{\alpha_i^\vee})^T = t^{\alpha_i^\vee}, \quad x_i(t)^t = x_i(t), \quad y_i(t)^t = y_i(t), \quad (t^{\alpha_i^\vee})^t = t^{-\alpha_i^\vee}.$$

Notons  $G_0 := N^-HN$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui admettent une décomposition (unique) gaussienne ; on écrira  $x = [x]_- [x]_0 [x]_+$  pour  $x \in G_0$ .

Pour toute suite d'indices  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$  et tout  $m$ -uplet  $t = (t_1, \dots, t_m)$  de  $\mathbb{C}^m$ , on note :

$$x_{\mathbf{i}}(t) := x_{i_1}(t_1) \cdots x_{i_m}(t_m), \quad \text{et} \quad x_{-\mathbf{i}}(t) := y_{i_1}(t_1) t_1^{-\alpha_{i_1}^\vee} \cdots y_{i_m}(t_m) t_m^{-\alpha_{i_m}^\vee}.$$

D'après [2], les  $x_{\mathbf{i}}$  et  $x_{-\mathbf{i}}$  paramétrisent des sous variétés de  $G$ , et en particulier pour  $\mathbf{i}$  un mot réduit de  $w_0$ , on a

**Théorème 3.1.** *Il existe deux sous variétés de  $G$ , notées  $L_{>0}^{e,w_0}$ , resp.  $L_{>0}^{w_0,e}$ , telles que pour tout  $\mathbf{i}$  mot réduit de  $w_0$ , l'application  $x_{\mathbf{i}}$ , resp.  $x_{-\mathbf{i}}$ , réalise une bijection de  $\mathbb{R}_{>0}^N$  sur  $L_{>0}^{e,w_0}$ , resp.  $L_{>0}^{w_0,e}$ .*

On note  $\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'}$  :=  $x_{\mathbf{i}'}^{-1} \circ x_{\mathbf{i}}$  et  $\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'}$  :=  $x_{-\mathbf{i}'}^{-1} \circ x_{-\mathbf{i}}$  les applications de changement de paramétrisation. Un résultat important de [3] donne que ces applications relèvent géométriquement les applications  $R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'}$  et  $R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'}$  de changement de paramétrisation de la base canonique. Plus précisément, utilisant les résultats sur les semicorps de [1], on définit une transformation de « tropicalisation », notée  $[\cdot]_{\text{Trop}}$ . Brièvement, l'application  $[\cdot]_{\text{Trop}}$  est une application entre le semicorps  $\mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$  des expressions rationnelles sans soustraction en  $t_1, \dots, t_N$  et l'ensemble des applications de  $\mathbb{Z}^N$  dans  $\mathbb{Z}$  et qui consiste à remplacer la multiplication par l'addition, la division par la soustraction et l'addition par l'opération  $a \oplus b := \min(a, b)$ . On a d'après [3],

**Théorème 3.2.** *Les composantes de  $(\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'})^\vee$  et  $(\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction, et (i)  $[(\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} = R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'}(t)$ ; (ii)  $[(\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} = R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'}(t)$ .*

La notation  $(\cdot)^\vee$  signifie que l'on considère les formules analogues dans le dual de Langlands de  $G$ . On note aussi  $[\cdot]_{\text{Trop}}$  l'application  $[\cdot]_{\text{Trop}}$  appliquée sur chaque composante.

**3.2.** Soit  $\zeta : L_{>0}^{w_0,e} \rightarrow L_{>0}^{e,w_0}$  définie par  $\zeta(x) := [x^T]_+$ . En utilisant (1), on obtient aisément que l'application  $\zeta$  est bien définie et plus précisément,

**Proposition 3.3.** *Soit  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$  un mot réduit de  $w_0$ , et  $(t'_1, \dots, t'_N) = (x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})(t_1, \dots, t_N)$ . On a alors  $t'_k = t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{i_k i_j}}$ .*

On peut maintenant donner la formule du relèvement géométrique de  $\Phi_\lambda$  :

**Théorème 3.4.** *Soit  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  deux mots réduits de  $w_0$ , alors les composantes  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction, et  $b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda c_{\mathbf{i}'}^{-1}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} + b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda(v_\lambda)$ .*

On pose  $(l_1, \dots, l_N) := b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda(v_\lambda)$ . Notons que ces constantes peuvent être données explicitement, [5]. On obtient alors la formule suivante :

**Corollaire 3.5.** *Pour  $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda c_{\mathbf{i}}^{-1}(t_1, \dots, t_N)$ ,  $t'_k = l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j$ .*

**Démonstration.** On fixe un poids  $\lambda$  dans  $P^+$ . Soit  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} : \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}^N$  une famille d'applications indexée par deux mots réduits de  $w_0$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- (1)  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_{\lambda}(v_{\lambda})$  ;
- (2)  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} = R_{\mathbf{i}'',\mathbf{i}'}^{\mathbf{i}} \circ \Phi_{\mathbf{i}'',\mathbf{i}'} = \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}''} \circ R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}''}$  ;
- (3) Pour  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(t_1, \dots, t_N) = (t'_1, \dots, t'_N)$ ,  $t'_k + t_1$  et  $t'_k$ ,  $k \neq 1$ , sont des fonctions de  $t_2, \dots, t_N$ .

Le théorème est une conséquence de la proposition suivante :

**Proposition 3.6.** *On a,*

- (i) si  $(\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'})$  est une famille vérifiant les conditions (1)–(3), alors  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} = b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}'}^{-1}$  ;
- (ii) la famille  $(\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'})$  définie par  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}(t)]_{\text{Trop}} + b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_{\lambda}(v_{\lambda})$  vérifie les conditions (1)–(3).

**Démonstration.** Prouvons le point (ii). Remarquons que pour tout  $Q$ , expression rationnelle sans soustraction,  $[Q]_{\text{Trop}}(0, \dots, 0) = 0$ , (1) est clair. Utilisant 3.2 et 3.3 les points (2) et (3) sont clairs. Reste à montrer le point (i). Soit  $(\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'})$  une famille vérifiant les conditions (1)–(3), on peut définir des applications  $F_{\mathbf{i}} : \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  par  $F_{\mathbf{i}}(b) = \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b)$ ,  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ . Ces applications ne dépendent pas de  $\mathbf{i}'$  d’après (2). Montrons par induction sur le poids de  $b$ , que pour tout mot  $\mathbf{i}$ ,  $F_{\mathbf{i}}(b) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(\Phi_{\lambda}(b))$ . Si  $b = v_{\lambda}$ , c’est clair d’après (1). Si  $b = \tilde{f}_i(b')$ , on peut choisir un mot réduit  $\mathbf{i}'$  commençant par  $i$ ,  $\mathbf{i}' = (i, i'_2, \dots, i'_N)$ . On a  $F_{\mathbf{i}'}(b) = \Phi_{\mathbf{i}',\mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(\tilde{f}_i(b')) = \Phi_{\mathbf{i}',\mathbf{i}'}(c_{\mathbf{i}'}(b') + (1, 0, \dots, 0))$ . Utilisant la condition (3) on a alors  $\Phi_{\mathbf{i}',\mathbf{i}'}(c_{\mathbf{i}'}(b') + (1, 0, \dots, 0)) = \Phi_{\mathbf{i}',\mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0)$ . Ainsi  $F_{\mathbf{i}'}(b) = \Phi_{\mathbf{i}',\mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) = F_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\Phi_{\lambda}(b')) - (1, 0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\tilde{e}_i \Phi_{\lambda}(b')) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\Phi_{\lambda}(\tilde{f}_i b')) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\Phi_{\lambda}(b))$ . Puis utilisant la condition (2), on a  $F_{\mathbf{i}}(b) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(\Phi_{\lambda}(b))$ , pour tout mot réduit  $\mathbf{i}$ .

**4. L’involution de Schützenberger**

**4.1.** L’involution  $i \mapsto i^*$  de l’ensemble  $\{1, \dots, n\}$  est définie par  $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$ . Pour une suite d’indice  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ , on pose  $\mathbf{i}^* := (i_1^*, \dots, i_m^*)$ . On note  $\delta$  l’automorphisme défini sur les générateurs par,

$$\delta(E_i) = E_{i^*}, \quad \delta(F_i) = F_{i^*}, \quad \delta(H_i) = H_{i^*}.$$

Comme en 2.3, pour  $\lambda$  dans  $P^+$ , l’application  $\delta$  induit un automorphisme de  $V(\lambda)$  noté  $d_{\lambda}$  qui préserve la base canonique. De plus pour tout élément  $b_{\mathbf{i}}(t)$  de  $\mathcal{B}(\lambda)$ , on a  $d_{\lambda}(b_{\mathbf{i}}(t)) = b_{\mathbf{i}^*}(t)$ .

L’application  $\eta_{\lambda} := \Phi_{\lambda} \circ d_{\lambda}$  correspond à l’involution de Schützenberger.

**4.2.** Nous pouvons donner le relèvement géométrique de l’application  $\eta_{\lambda}$ . Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit de  $w_0$ . On pose  $(l_1, \dots, l_N) := b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda})$ .

**Corollaire 4.1.** Soit  $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda}(c_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N))$ , alors  $t'_k = l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j$ .

**Références**

- [1] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, Parametrization of canonical bases and totally positive matrices, Adv. Math. 122 (1996) 49–149.
- [2] A. Berenstein, A. Zelevinski, Canonical bases for the quantum group of type  $A_r$ , and piecewise-linear combinatorics, Duke Math. J. 143 (1996) 473–502.
- [3] A. Berenstein, A. Zelevinski, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. 82 (2001) 77–128.
- [4] P. Caldero, Toric degenerations of Schubert varieties, Transf. Groups 7 (1) (2002) 51–60.
- [5] P. Caldero, R. Marsh, S. Morier-Genoud, Realisation of the Lusztig’s cone, Preprint.
- [6] M. Kashiwara, On crystal bases, in: Canad. Math. Soc., Conference Proceed, Vol. 16, 1995, pp. 155–195.
- [7] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, in: Progr. Math., Vol. 110, Birkhäuser, 1993.
- [8] S. Morier-Genoud, Semi-toric degenerations of Richardson varieties, Preprint.