Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 653–656
Comptes Rendus Mathematique

Équations aux dérivées partielles

Solutions sous-analytiques globales de certaines équations d'Hamilton–Jacobi

Emmanuel Trélat

Université Paris-Sud, laboratoire AN-EDP, mathematiques, UMR 8628, bât. 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 9 juillet 2003 ; accepté après révision le 30 septembre 2003

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Dans les années 80, Crandall et Lions ont introduit le concept de solution de viscosité dans le but d'obtenir des résultats d'existence et/ou d'unicité de solutions d'équations d'Hamilton–Jacobi. Dans cette Note nous nous intéressons au problème de Dirichlet pour des équations d'Hamilton–Jacobi issues de problèmes de calcul des variations, et affirmons que pour des données analytiques la solution de viscosité est globalement sous-analytique. Nous étendons ce résultat à des équations eikonales généralisées issues de problèmes de géométrie sous-Riemannienne. ***Pour citer cet article : E. Trélat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Global subanalytic solutions of Hamilton–Jacobi type equations. In the 1980 Crandall and Lions introduced the concept of viscosity solution in order to get existence and/or unicity results for Hamilton–Jacobi equations. In this Note we focus on the Dirichlet problem for Hamilton–Jacobi equations stemming from calculus of variations, and assert that if the data are analytic then the viscosity solution is moreover subanalytic. We extend this result to generalized eikonal equations, stemming from sub-Riemannian geometry problems. ***To cite this article: E. Trélat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et H une fonction continue sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, appelée *Hamiltonien*, et g une fonction continue sur $\partial\Omega$. L'introduction du concept de *solution de viscosité* par Crandall et Lions dans les années 80 [7] a permis de démontrer de nombreux résultats d'existence et/ou d'unicité, notamment pour des problèmes de Dirichlet du type :

$$H\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = g,$$

Adresse e-mail : emmanuel.trelat@math.u-psud.fr (E. Trélat).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.09.028

ainsi que d'autres problèmes (cas d'évolution, équation du deuxième ordre, ...), dans un cadre très général, voir par exemple [7,12,2,3,8]. La littérature à ce sujet est immense.

Cependant si H, g et Ω sont analytiques on peut s'attendre à ce que la solution de viscosité soit plus régulière. Bien entendu à cause de chocs possibles on ne peut pas espérer une solution globalement analytique. Par exemple dans le cas de *l'équation eikonale* : $\|\nabla u(x)\|^2 = 1$, $u_{/\partial\Omega} = 0$, il est facile de voir qu'il existe une unique solution de viscosité qui s'écrit : $u(x) = d(x, \partial\Omega)$. Bien entendu cette fonction u n'est pas analytique sur Ω, ceci étant dû à l'intersection des courbes caractéristiques (pour un exposé sur la méthode des caractéristiques, consulter les références citées plus haut). En revanche la fonction u est, en un sens, « analytique par morceaux ». Il s'avère que le bon concept pour décrire ce type de solution est le concept de *sous-analyticité* (pour une définition générale, voir [10,11]). Une fonction sous-analytique est en particulier *stratifiable*, et différentiable sur chaque strate.

Dans cette Note nous énonçons deux résultats concernant le problème de Dirichlet pour des équations de type eikonal, tout d'abord dans le cadre classique du calcul des variations, puis dans le cas où l'équation est issue d'un problème de géométrie sous-Riemannienne. On se limite à ces deux résultats, sans démonstration. Dans un article complet à venir [13], ces théorèmes sont démontrés, étendus à des équations issues de problèmes plus généraux de contrôle optimal, et les cas d'évolution (problèmes de Cauchy–Dirichlet) sont également envisagés.

2. Équations d'Hamilton–Jacobi et calcul des variations

Le résultat de cette section précise celui de [12, Théorème 5.3, p. 132] dans le cadre analytique. Rappelons tout d'abord le cadre classique du calcul des variations. Soit $H(x, p)$ une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, appelée *Hamiltonien*, satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H_1) H est uniformément superlinéaire, i.e.

$$\forall A > 0\ \exists C(A) \in \mathbb{R}\ \forall (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad H(x, p) \geqslant A\|p\| - C(A),$$

(H_2) H est strictement convexe en p, i.e. pour tout couple $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la Hessienne $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x, p)$ est définie positive.

Pour tout couple $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on pose : $L(x, v) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}(\langle p, v\rangle - H(x, p))$. Il est bien connu que, sous les hypothèses précédentes sur H, cette fonction appelée *Lagrangien*, est bien définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et de plus satisfait aussi les hypothèses (H_1)–(H_2), voir par exemple [9]. On a le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit Ω un ouvert borné sous-analytique de $\mathbb{R}^n$, c un réel, et soit $H(x, p)$ un Hamiltonien analytique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses* (H_1)–(H_2)*, et tel que* :

$$\exists \alpha < c\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad H(x, 0) \leqslant \alpha.$$

Soit $\mathcal{AC}$ l'ensemble des chemins absolument continus de $\mathbb{R}^n$. Pour tous $x, y \in \overline{\Omega}$ posons

$$S(x, y) = \inf\left\{ \int_0^T \big(L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + c\big)\,\mathrm{d}t \;\Big|\; T > 0,\ x(\cdot) \in \mathcal{AC},\ x(0) = y,\ x(T) = x \right\},$$

où L est le Lagrangien associé au Hamiltonien H. Alors pour tout $y_0 \in \overline{\Omega}$ la fonction $x \mapsto S(x, y_0)$ (resp. pour tout $x_0 \in \overline{\Omega}$ la fonction $y \mapsto S(x_0, y)$) est une solution de viscosité sous-analytique de : $H(x, \nabla v(x)) - c = 0$ *sur* $\Omega\backslash\{y_0\}$, $v(y_0) = 0$ (*resp.* $H(x, -\nabla v(x)) - c = 0$ *sur* $\Omega\backslash\{x_0\}$, $v(x_0) = 0$).

Soit g une fonction sous-analytique sur $\Sigma = \partial\Omega$, satisfaisant la condition dite de compatibilité :

$$\forall x, y \in \Sigma \quad g(x) - g(y) \leqslant S(x, y).$$

Finalement, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, *soit*

$$S(x) = \inf_{y \in \Sigma} \big(g(y) + S(x, y)\big).$$

Alors S *est l'unique solution de viscosité du problème de Dirichlet* :

$$H\big(x, \nabla v(x)\big) - c = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad v|_\Sigma = g,$$

et de plus est continue et sous-analytique sur $\overline{\Omega}$.

3. Équations eikonales généralisées et géométrie sous-Riemannienne

Rappelons tout d'abord une définition générale de la distance sous-Riemannienne, due à [4]. Soient M une variété lisse de dimension n, m un entier inférieur ou égal à n, et $f_1, \ldots, f_m$ des champs de vecteurs lisses sur M. Pour tous $x \in M$ et $v \in T_x M$, posons :

$$g(x, v) = \inf\big\{u_1^2 + \cdots + u_m^2 \mid u_1 f_1(x) + \cdots + u_m f_m(x) = v\big\}.$$

Alors $g(x, \cdot)$ est une forme quadratique définie positive sur le sous-espace de $T_x M$ engendré par $f_1(x), \ldots, f_m(x)$. En dehors de ce sous-espace on pose $g(x, v) = +\infty$. Cette forme g est appelée la métrique sous-Riemannienne associée au m-uplet de champs de vecteurs $(f_1, \ldots, f_m)$.

Notons $\mathcal{AC}([0, 1], M)$ l'ensemble des chemins absolument continus sur M, définis sur $[0, 1]$. La longueur d'un chemin $\gamma \in \mathcal{AC}([0, 1], M)$ est définie par $l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, \mathrm{d}t$. Enfin, la *distance sous-Riemannienne* associée au m-uplet de champs de vecteurs $(f_1, \ldots, f_m)$, entre deux points x_0, x_1 de M, est définie par :

$$d_{SR}(x_0, x_1) = \inf\big\{l(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{AC}\big([0, 1], M\big),\ \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\big\}.$$

Considérons par ailleurs le système différentiel dans $\mathbb{R}^n$:

$$\dot x(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i\big(x(t)\big),$$

où la fonction $u = (u_1, \ldots, u_m)$, appelée le contrôle, appartient à $L^2([0, 1], \mathbb{R}^m)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$; l'application $E_{x_0} : u \in L^2([0, 1], \mathbb{R}^m) \mapsto x(1) \in \mathbb{R}^n$, qui à un contrôle u associe l'extrémité de la solution correspondante $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$, est appelée *application entrée-sortie* au point x_0. C'est une application lisse. La trajectoire $x(\cdot)$ est dite *singulière* si le contrôle u associé est une singularité de l'application entrée-sortie. Elle est dite *minimisante* si elle réalise la distance sous-Riemannienne entre ses deux extrémités.

L'existence de trajectoires singulières minimisantes est intimement liée à la sous-analyticité de la distance sous-Riemannienne, voir [1,14]. Dans ces conditions le théorème suivant n'est pas surprenant.

Théorème 3.1. *Soit* Ω *un ouvert borné sous-analytique de* $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant 1$ *un entier, et soit* $H(x, p)$ *un Hamiltonien sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *défini par*

$$H(x, p) = \sum_{i=1}^m \big\langle p, f_i(x)\big\rangle^2,$$

où $f_1, \ldots, f_m$ *sont des champs de vecteurs analytiques sur* $\mathbb{R}^n$ *tels que l'algèbre de Lie qu'ils engendrent soit de rang maximal en tout point. Soit* $d_{SR}(\cdot, \cdot)$ *la distance sous-Riemannienne sur* $\mathbb{R}^n$ *associée au m-uplet* $(f_1, \ldots, f_m)$.

Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *la fonction* $x \mapsto d_{SR}(x, y_0)$ *est une solution de viscosité de* $H(x, \nabla v(x)) - 1 = 0$ *sur* $\mathbb{R}^n \backslash \{y_0\}$, $v(y_0) = 0$. *Si on suppose de plus que le système* $\dot x = \sum_i u_i f_i(x)$ *n'admet aucune trajectoire singulière minimisante non triviale partant de* y_0, *alors* $d_{SR}(\cdot, y_0)$ *est sous-analytique sur* $\mathbb{R}^n \backslash \{y_0\}$.

Soit g une fonction sous-analytique sur $\Sigma = \partial\Omega$, satisfaisant la condition de compatibilité :

$$\forall x, y \in \Sigma \quad g(x) - g(y) \leqslant d_{SR}(x, y),$$

et soit :

$$S(x) = \inf_{y\in\Sigma} \big(g(y) + d_{SR}(x, y)\big).$$

Alors S est continue sur $\overline{\Omega}$ et est l'unique solution de viscosité du problème de Dirichlet :

$$H\big(x, \nabla v(x)\big) - 1 = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad v|_\Sigma = g.$$

Si de plus le système $\dot{x} = \sum_i u_i f_i(x)$ n'a aucune trajectoire singulière minimisante non triviale partant de Σ, alors S est sous-analytique sur Ω.

Remarque 1. Si le système est de plus « medium-fat » (voir [1]) en tout point de Σ, alors S est sous-analytique sur $\overline{\Omega}$ tout entier, voir [13]. Cette situation se produit génériquement lorsque $n \leqslant m(m-1)+1$.

Remarque 2. Si $m \geqslant 3$, il existe un sous-ensemble ouvert dense de l'ensemble des m-uplets champs de vecteurs indépendants (pour la topologie C^∞ de Withney) tel que tout système sous-Riemannien associé à un m-uplet de cet ensemble n'admet aucune singulière minimisante non triviale (voir [5,6], voir aussi [1] pour l'existence d'un ensemble dense seulement).

Remarque 3. On peut construire des exemples explicites où toutes les données du problème sont analytiques et pourtant l'unique solution de viscosité n'est pas sous-analytique, ceci étant dû à l'existence de singulières minimisantes non triviales, voir [13].

Remerciement

Je tiens à remercier chaleureusement P. Gérard pour ses conseils ainsi que A. Fathi pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Références

[1] A. Agrachev, J.P. Gauthier, On subanalyticity of Carnot–Carathéodory distances, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 18 (3) (2001).
[2] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations, Birkhäuser, Boston, 1997.
[3] G. Barles, Solutions de Viscosité des Équations de Hamilton–Jacobi, in: Math. Appl., Vol. 17, Springer-Verlag, 1994.
[4] A. Bellaïche, Tangent Space in Sub-Riemannian Geometry, Sub-Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1996.
[5] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, Propriétés génériques des trajectoires singulières, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (1) (2003).
[6] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, Genericity Properties for Singular Trajectories, Preprint, Univ. Paris Sud, 2003.
[7] M.G. Crandall, P.-L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983) 1–42.
[8] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.
[9] A. Fathi, Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, en préparation.
[10] R.M. Hardt, Stratification of real analytic mappings and images, Invent. Math. 28 (1975).
[11] H. Hironaka, Subanalytic Sets, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Tokyo, 1973.
[12] P.-L. Lions, Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations, Pitman, 1982.
[13] E. Trélat, Global subanalytic solutions of Hamilton–Jacobi type equations, Preprint, Univ. Paris-Sud, Orsay, 2003.
[14] E. Trélat, Étude asymptotique et transcendance de la fonction valeur en contrôle optimal ; catégorie log-exp en géométrie sous-Riemannienne dans le cas Martinet, Thèse, Univ. de Bourgogne, 2000.