



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 117–120



Algèbre

Homologies d'algèbres Artin–Schelter régulières cubiques

Nicolas Marconnet

LARAL, faculté des sciences et techniques, 23, rue P. Michelon, 42023 Saint-Etienne cedex, France

Reçu le 10 juin 2003 ; accepté après révision le 7 octobre 2003

Présenté par Alain Connes

Résumé

Nous calculons l'homologie de Hochschild des algèbres Artin–Schelter régulières cubiques de type A à coefficients génériques. Nous suivons la méthode employée par Van den Bergh (*K-Theory* 8 (1994) 213–230) dans le cas quadratique, en considérant ces algèbres comme déformations d'une algèbre de polynômes, avec crochets de Poisson remarquables. Un nouveau quasi-isomorphisme est introduit. Nous calculons aussi la cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique, l'homologie cyclique périodique et la cohomologie de Hochschild. *Pour citer cet article : N. Marconnet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Homologies of cubic Artin–Schelter regular algebras. Hochschild homology of cubic Artin–Schelter regular algebras of type A with generic coefficients is computed. We follow the method used by Van den Bergh (*K-Theory* 8 (1994) 213–230) in the quadratic case, by considering these algebras as deformations of a polynomial algebra, with remarkable Poisson brackets. A new quasi-isomorphism is introduced. De Rham cohomology, cyclic and periodic cyclic homologies, and Hochschild cohomology are also computed. *To cite this article: N. Marconnet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Les algèbres régulières introduites par Artin et Schelter dans [1] ont été classifiées en dimension globale 3 dans le même article. Pour simplifier, nous écrivons AS-régulières au lieu de Artin–Schelter régulières. Les algèbres AS-régulières de dimension globale 3 ont des relations quadratiques ou cubiques, et sont classifiées en différents types. Elles ont été étudiées dans [2] ainsi que dans de nombreux articles ultérieurs. En particulier, Artin, Tate et Van den Bergh ont montré que les algèbres AS-régulières de dimension globale 3 sont noethériennes et intègres.

Dans [8], Michel Van den Bergh a calculé l'homologie de Hochschild des algèbres AS-régulières de type A quadratiques à coefficients génériques, ainsi que la cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique et l'homologie cyclique périodique de ces algèbres (voir [8] pour la définition de ces homologies). Dans cette Note, nous calculons les mêmes homologies dans le cas des algèbres AS-régulières de type A cubiques à coefficients génériques, en

Adresse e-mail : nicolas.marconnet@univ-st-etienne.fr (N. Marconnet).

utilisant des techniques similaires à celles de Van den Bergh. Nous calculons aussi la cohomologie de Hochschild, obtenant ainsi la dualité de Poincaré comme dans le cas quadratique [9].

Nous travaillons sur un corps k de caractéristique nulle. Les algèbres AS-régulières de type A cubiques sont des k -algèbres graduées de la forme $A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$ avec

$$f_1 = axy^2 + byxy + ay^2x + cx^3, \quad f_2 = ayx^2 + bxyx + ax^2y + cy^3,$$

où $(a, b, c) \in k^3 \setminus S$, avec $S = \{(a, b, c) \in k^3; a^2 = b^2 = c^2\} \cup (\{0\} \times \{0\} \times k) \cup (\{0\} \times k \times \{0\})$ [1,2]. Les générateurs x et y sont de degré 1. On sait que la série de Poincaré de l'algèbre A est $1/((1-t)^2(1-t^2))$, et que l'élément suivant est dans le centre de l'algèbre : $C = b(c^2 - a^2)yx^2y + a(a^2 - b^2)yx^2y - a(c^2 - a^2)x^2y^2 - c(a^2 - b^2)x^4$.

2. Homologies de A

Soit A une algèbre AS-régulière de type A cubique. On suppose qu'elle est à coefficients génériques, c'est-à-dire que ses coefficients a , b et c sont \mathbb{Q} -algébriquement indépendants. L'homologie et la cohomologie de Hochschild de A sont notées $HH_*(A)$ et $HH^*(A)$. On a les résultats suivants :

Théorème 2.1. *Les $HH_i(A)$ sont des $k[C]$ -modules libres de rangs 9, 9, 1, 1 pour $i = 0, 1, 2, 3$ respectivement. On peut donner de façon explicite deux cycles de Hochschild $\Pi \in A^{\otimes 3}$ et $\Delta \in A^{\otimes 4}$, tous deux de degré 4, tels que $HH_2(A)$ soit engendré par Π et $HH_3(A)$ soit engendré par Δ . Les k -espaces vectoriels gradués $HH_i(A)$ possèdent les séries de Poincaré suivantes :*

$$P(HH_0(A), t) = \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{1 - t^4}, \quad (1)$$

$$P(HH_1(A), t) = \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{1 - t^4}, \quad (2)$$

$$P(HH_2(A), t) = P(HH_3(A), t) = \frac{t^4}{1 - t^4}. \quad (3)$$

De plus, le bord B de Connes est une surjection de $HH_0(A)$ sur $HH_1(A)$ et un isomorphisme de $HH_2(A)$ dans $HH_3(A)$.

Corollaire 2.2. *La cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique et l'homologie cyclique périodique de A sont données par :*

- (1) $H_{DR}^0(A) = k$, $H_{DR}^i(A) = 0$ si $i \neq 0$,
- (2) $HC_0(A) = HH_0(A)$, $HC_2(A) = k \oplus HH_2(A)$, $HC_i(A) = 0$ si i est impair, $HC_i(A) = k$ si i est pair et $i \geq 4$,
- (3) $HC_i^{\text{per}}(A) = k$ si i est pair, $HC_i^{\text{per}}(A) = 0$ si i est impair.

D'autre part, en utilisant le fait que A est de Koszul au sens généralisé défini par Roland Berger [3,4], on obtient un quasi-isomorphisme explicite entre le complexe qui définit l'homologie de Hochschild et le complexe qui définit la cohomologie de Hochschild. Notant D l'unique dérivation de A vérifiant $D(x) = x$ et $D(y) = y$, on en tire le résultat suivant :

Théorème 2.3. *On a des isomorphismes de $k[C]$ -modules : $HH^i(A) \simeq HH_{3-i}(A)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ (dualité de Poincaré). En particulier, le centre de A est donné par $Z(A) = k[C]$, et $HH^1(A)$ est le $k[C]$ -module libre engendré par D .*

3. Esquisse de la preuve du théorème principal

Nous allons présenter, sans entrer dans les détails, les étapes de la preuve du Théorème 2.1 donnant l’homologie de Hochschild de A . Soit A une algèbre AS-régulière de type A cubique à coefficients génériques. On peut normaliser les relations de A de telle sorte que

$$\begin{aligned} f_1 &= (-xy^2 + 2yxy - y^2x) - p(xy^2 + yxy + y^2x) - qx^3, \\ f_2 &= (-yx^2 + 2xyx - x^2y) - p(yx^2 + xyx + x^2y) - qy^3, \end{aligned}$$

où p et q sont deux éléments \mathbb{Q} -algébriquement indépendants de k . Quitte à agrandir le corps de base, on peut supposer que k est le corps des séries de Laurent formelles $k_0((h))$ sur un corps k_0 de caractéristique nulle, et que $p = p_1h^2$, $q = q_1h^2$, où p_1 et q_1 sont deux éléments \mathbb{Q} -algébriquement indépendants de k_0 . Enfin, on identifie A à la k -algèbre graduée $k\langle x, y, z \rangle / (g, f_1, f_2)$, pour laquelle

$$\begin{aligned} g &= [x, y] - hz, \\ f_1 &= [y, z] - p_1h(xy^2 + yxy + y^2x) - q_1hx^3, \\ f_2 &= [z, x] - p_1h(yx^2 + xyx + x^2y) - q_1hy^3 \end{aligned}$$

avec x, y de degré 1 et z de degré 2. Si a_1 et a_2 sont deux éléments de A , on note $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ le commutateur de a_1 et a_2 .

Procédons comme dans [8]. On introduit une filtration F par les puissances de h sur l’algèbre A . Le gradué associé à A est alors $gr_F(A) = \mathcal{R}[h, h^{-1}]$, où $\mathcal{R} = k_0[x, y, z]$ est l’algèbre commutative graduée des polynômes en x, y, z , où x et y sont de degré 1 et z est de degré 2. On montre alors que A est une déformation de l’algèbre \mathcal{R} , dont le crochet de Poisson associé $\{ \cdot, \cdot \}$ est défini sur les générateurs par : $\{x, y\} = z$, $\{y, z\} = 3p_1xy^2 + q_1x^3$, $\{z, x\} = 3p_1x^2y + q_1y^3$. La suite spectrale associée à la filtration F est faiblement convergente, et on montre qu’elle peut s’écrire $E^1 = \Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \rightarrow HH_*(A)$ en utilisant des résultats de Brylinski [6]. Ici, $\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}$ désigne le module gradué des formes différentielles de l’algèbre de polynômes \mathcal{R} . Pour avoir le second terme E^2 , il suffit de calculer l’homologie de Poisson de \mathcal{R} , c’est-à-dire l’homologie du complexe

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}}^3 \xrightarrow{\partial_3} \Omega_{\mathcal{R}}^2 \xrightarrow{\partial_2} \Omega_{\mathcal{R}}^1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R} \longrightarrow 0.$$

On remarque que $\{y, z\} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, $\{z, x\} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ et $\{x, y\} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$, où $\phi = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}q_1x^4 + \frac{1}{4}q_1y^4 + \frac{3}{2}p_1x^2y^2$ est un polynôme homogène de degré 4. Cet élément est l’image dans $gr_0(A)$ de l’élément central $\Phi = -\frac{1}{4h^2}C$ de A . Ceci nous permet de calculer l’homologie de Poisson de \mathcal{R} en utilisant des techniques de calcul vectoriel. Posons $\delta = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega_{\mathcal{R}}^3$ et $\pi = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + 2z dx \wedge dy \in \Omega_{\mathcal{R}}^2$.

Proposition 3.1. *Les $H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ sont des $k_0[\phi]$ -modules libres de rangs 9, 9, 1, 1 pour $i = 0, 1, 2, 3$ respectivement. De plus $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est engendré par π et $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est engendré par δ . Les séries de Poincaré des k_0 -espaces vectoriels gradués $H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ sont données par les seconds membres respectifs de (1), (2) et (3). Enfin, d définit une surjection de $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ dans $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$, et un isomorphisme de $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ dans $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$.*

Pour en déduire le Théorème 2.1, il reste à montrer que la suite spectrale dégénère à l’ordre 2. Ceci est vrai si, pour tout i , on peut remonter les éléments de $H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ en des cycles de Hochschild de $A^{\otimes(i+1)}$, ce qui n’est pas difficile à prouver pour $i = 0$ et $i = 1$. Par contre, trouver deux cycles de Hochschild $\Pi \in A^{\otimes 3}$ et $\Delta \in A^{\otimes 4}$ au dessus de π et δ demande plus de travail.

D’après R. Berger [3,4], l’algèbre A est de Koszul au sens généralisé, et un certain « petit » complexe $(K(A), d)$ calcule l’homologie de Hochschild de A :

$$0 \longrightarrow A \otimes J_4 \xrightarrow{d_3} A \otimes R \xrightarrow{d_2} A \otimes V \xrightarrow{d_1} A \longrightarrow 0,$$

où $V = A_1$, $R \subset V^{\otimes 3}$ est le sous k -espace vectoriel de $k\langle x, y \rangle$ engendré par f_1 et f_2 , et $J_4 = (V \otimes R) \cap (R \otimes V) \subset V^{\otimes 4}$. Ce complexe est en fait le contracté d'un 3-complexe [4,5], mais nous n'utilisons pas cette approche ici. Nous donnons un quasi-isomorphisme explicite entre $K(A)$ et le complexe de Hochschild $C(A) = (A^{\otimes(n+1)}, b)$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b_4} & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b_3} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b_2} & A^{\otimes 2} & \xrightarrow{b_1} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \psi & & \uparrow \varphi & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A \otimes J_4 & \xrightarrow{d_3} & A \otimes R & \xrightarrow{d_2} & A \otimes V & \xrightarrow{d_1} & A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Les deux premières flèches verticales sont l'identité de A et l'injection canonique de $A \otimes V$ dans $A^{\otimes 2}$. Les morphismes $\varphi : A \otimes R \rightarrow A^{\otimes 3}$ et $\psi : A \otimes J_4 \rightarrow A^{\otimes 4}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} & \varphi \left(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i [a v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} + a \otimes v_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} + v_3^{(i)} a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}], \\ & \psi \left(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i [a \otimes v_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} v_4^{(i)}]. \end{aligned}$$

Soit $w = x f_1 + y f_2 \in J_4$. Cet élément est stable par tous les automorphismes de $A^{\otimes 4}$ induits par les permutations circulaires des quatre facteurs. On vérifie alors facilement que $x \otimes f_1 + y \otimes f_2 \in A \otimes R$ et $1 \otimes w \in A \otimes J_4$ sont des cycles de $K(A)$. Donc $\varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) \in A^{\otimes 3}$ et $\psi(1 \otimes w) \in A^{\otimes 4}$ sont deux cycles de Hochschild. On montre par le calcul qu'à un bord près, et à une multiplication par un scalaire près, ils définissent deux cycles de Hochschild Π et Δ de $C(A)$ qui s'envoient sur π et δ , ce qui permet de conclure.

Le quasi-isomorphisme ci-dessus est valable pour toute algèbre de Koszul généralisée cubique, de dimension globale 3. Il s'applique donc à l'algèbre de Yang–Mills étudiée récemment par Connes et Dubois–Violette [7].

Remerciements

Je tiens à remercier Roland Berger pour son aide tout au long de ce travail.

Références

- [1] M. Artin, W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. in Math.* 66 (1987) 171–216.
- [2] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, in: P. Cartier, et al. (Eds.), *The Grothendieck Festschrift*, vol. 1, Birkhäuser, 1990, pp. 33–85.
- [3] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras, *J. Algebra* 239 (2001) 705–734.
- [4] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras II, *math.QA/0301172*.
- [5] R. Berger, M. Dubois-Violette, M. Wambst, Homogeneous algebras, *J. Algebra* 261 (2003) 172–185.
- [6] J.-L. Brylinski, A differential complex for Poisson manifolds, *J. Differential Geom.* 28 (1988) 93–114.
- [7] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang–Mills algebra, *Lett. Math. Phys.* 61 (2002) 149–158.
- [8] M. Van den Bergh, Non-commutative homology of some three-dimensional quantum spaces, *K-Theory* 8 (1994) 213–230.
- [9] M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (5) (1998) 1345–1348; *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002) 2809–2810.