



Géométrie analytique

Cohérence des faisceaux d'idéaux multiplicateurs avec estimations

Dan Popovici

Institut Fourier, bâtiment maths pures, 100, rue des Maths, BP 53, 38041 Grenoble cedex, France

Reçu et accepté le 12 novembre 2003

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble pseudoconvexe borné et φ une fonction plurisousharmonique dans Ω . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, considérons le faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathcal{I}(m\varphi)$ et l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$ des fonctions holomorphes f dans Ω telles que $|f|^2 e^{-2m\varphi}$ est intégrable sur Ω . Nous démontrons une version effective, avec estimations, d'un résultat bien connu de Nadel affirmant que le faisceau $\mathcal{I}(m\varphi)$ est cohérent et engendré par une base orthonormée quelconque de l'espace $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$. Ce résultat pourrait servir à l'étude des régularisations de courants avec contrôle des masses de Monge–Ampère. **Pour citer cet article :** D. Popovici, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004)*.

Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

Coherence of multiplier ideal sheaves with estimates. Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded pseudoconvex open set and let φ be a plurisubharmonic function on Ω . For every positive integer m , we consider the multiplier ideal sheaf $\mathcal{I}(m\varphi)$ and the Hilbert space $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$ of holomorphic functions f on Ω such that $|f|^2 e^{-2m\varphi}$ is integrable on Ω . We give an effective version, with estimates, of Nadel's result stating that the sheaf $\mathcal{I}(m\varphi)$ is coherent and generated by an arbitrary orthonormal basis of $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$. This result is expected to play a major part in the context of current regularizations with estimates of the Monge–Ampère masses. **To cite this article:** D. Popovici, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004)*.

Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

Abridged English version

Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded pseudoconvex open set and let φ be a plurisubharmonic function on Ω . For every positive integer m , we consider the multiplier ideal sheaf $\mathcal{I}(m\varphi)$ of germs of holomorphic functions $f \in \mathcal{O}_{\Omega,x}$ such that $|f|^2 e^{-2m\varphi}$ is integrable with respect to the Lebesgue measure in a neighbourhood of x . We also consider the Hilbert space of its global L^2 sections

$$\mathcal{H}_\Omega(m\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega); \int_{\Omega} |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda < +\infty \right\}.$$

Adresse e-mail : Dan.Popovici@ujf-grenoble.fr (D. Popovici).

We derive an effective version, with estimates, of Nadel’s result (see [1]) asserting that $\mathcal{J}(m\varphi)$ is a coherent sheaf generated by an arbitrary orthonormal basis of $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$. The method draws heavily on Siu’s article [2]. The only difference lies in our working with functions on pseudoconvex open sets instead of with global sections of ample line bundles on projective manifolds.

Theorem 0.1. *Let φ be a plurisubharmonic function on a bounded pseudoconvex open set $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ of diameter d , m a positive integer, and $(\sigma_{m,j})_{j \geq 0}$ an arbitrary orthonormal basis of the Hilbert space $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$.*

Then, for every point $x \in \Omega$ and every $r > 0$ such that $B(x, r) \Subset \Omega$, there exists a constant $C(n) > 0$ depending only on n such that for $r' = \frac{r}{\sqrt{nC(n)}} (\frac{r}{d})^{n+2}$ we have the following property: for every section $f \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ such that $\int_{B(x,r)} |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda = C_f < +\infty$, there exist holomorphic functions $b_{m,j} \in \mathcal{O}(B(x, r'))$, $j \geq 0$, such that

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} b_{m,j} \sigma_{m,j} \quad \text{on } B(x, r') \quad \text{and} \quad \sup_{B(x,r')} \sum_{j=0}^{+\infty} |b_{m,j}|^2 \leq \frac{1}{(1-r/d)^2} \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f.$$

The first step in proving this theorem is the following lemma based on a crucial application of Skoda’s L^2 division theorem (see [3]) combined with Hörmander’s L^2 estimates for the $\bar{\partial}$ operator.

Lemma 0.2. *Let $d = \text{diam } \Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ and $r > 0$ such that $B(x, r) \Subset \Omega$. Then given any section $f \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ such that*

$$\int_{B(x,r)} |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda = C_f < +\infty,$$

there exist $F \in \Gamma(\Omega, \mathcal{J}(m\varphi))$ and sections $v_1, \dots, v_n \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ such that

$$f - F = \sum_{j=1}^n (z_j - x_j)/d \cdot v_j(z)$$

on $B(x, r)$ and satisfying, moreover, the estimates:

$$\int_{\Omega} |F|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^n \int_{B(x,r)} |v_j|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f,$$

where $C(n) > 0$ is a constant depending only on n .

Since $F \in \mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$, it can be written as $F = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sigma_{m,k}$, with $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2$ under control. The rest of the proof of Theorem 0.1 consists in repeatedly applying Lemma 0.2, starting with the v_{j_1} ’s acting as f , and ending with proving that a certain series converges uniformly on a ball of well determined radius to define a holomorphic function. Iterations of Lemma 0.2 give an effective version of Nakayama’s lemma.

1. Les estimations L^2

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble pseudoconvexe borné et φ une fonction plurisousharmonique dans Ω . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, considérons le faisceau d’idéaux multiplicateurs $\mathcal{J}(m\varphi)$ et l’espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$ de ses sections globales L^2 défini plus haut. Nous démontrons une version effective, avec estimations, du résultat de Nadel [1] affirmant que le faisceau $\mathcal{J}(m\varphi)$ est cohérent et engendré par une base orthonormée quelconque de l’espace $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$. La méthode nous a été fortement inspirée par l’article [2] de Siu. À la différence de celui-ci, nous travaillons avec des fonctions sur un ouvert de \mathbb{C}^n et non avec des sections de fibrés en droites amples sur une variété projective. La première étape est le

Lemme 1.1. Soit $d = \text{diam } \Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \Subset \Omega$. Étant donné une section $f \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ telle que

$$\int_{B(x,r)} |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda = C_f < +\infty,$$

il existe une section $F \in \Gamma(\Omega, \mathcal{J}(m\varphi))$ et des sections $v_1, \dots, v_n \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$, telles que $f - F = \sum_{j=1}^n (z_j - x_j)/d \cdot v_j(z)$ sur $B(x, r)$, satisfaisant de plus les estimations :

$$\int_{\Omega} |F|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \int_{B(x,r)} |v_j|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f,$$

où $C(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n .

Démonstration. L'ingrédient essentiel dans la démonstration de ce lemme est le théorème de division L^2 de Skoda (cf. [3]). Soit θ une fonction C^∞ sur Ω telle que $\text{Supp } \theta \subset \overline{B}(x, r)$, $\theta(z) \equiv 1$ sur $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$, et $|\bar{\partial}\theta| \leq \frac{3}{r}$ sur $B(x, r)$. On utilise les estimations L^2 de Hörmander pour résoudre l'équation $\bar{\partial}u = \bar{\partial}(d\theta f)$ sur Ω avec le poids strictement plurisousharmonique

$$m\varphi(z) + (n + 1) \log(|z - x|/d) + (|z - x|/d)^2.$$

On obtient, en tenant compte des estimations évidentes $\frac{r}{2} \leq |z - x| \leq r$ pour $z \in \text{Supp } \bar{\partial}\theta \subset \overline{B}(x, r) \setminus B(x, \frac{r}{2})$, et $|z - x| \leq d = \text{diam}(\Omega)$ pour $z \in \Omega$, une solution $u \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} |u(z)|^2 e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) \leq \int_{\Omega} \frac{|u(z)|^2}{(|z - x|/d)^{2(n+1)}} e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) \leq 18 e^2 2^{2(n+1)} \frac{1}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f.$$

Posons $F = \theta f - u$. La fonction F est holomorphe sur Ω , par construction. Si on pose $C_1(n) = 18 e^2 2^{2(n+1)}$ et $C_2(n) = 2(1 + C_1(n))$, elle vérifie, grâce à l'inégalité ci-dessus, l'estimation

$$\int_{\Omega} |F(z)|^2 e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) \leq 2 \left(1 + C_1(n) \frac{1}{(r/d)^{2(n+2)}} \right) C_f \leq \frac{C_2(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f. \tag{1}$$

De plus, $f - F = (1 - \theta)f + u$ sur $B(x, r)$, et les estimations précédentes entraînent :

$$\int_{B(x,r)} \frac{|f(z) - F(z)|^2}{(|z - x|/d)^{2(n+1)}} e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) \leq C_2(r, d, n) C_f, \quad \text{où } C_2(r, d, n) = \frac{2}{(r/d)^{2(n+1)}} \left(8 \cdot 2^n + \frac{C_1(n)}{(r/d)^2} \right).$$

On peut appliquer maintenant le théorème de Skoda pour obtenir une division effective de la fonction holomorphe $f - F$ sur $B(x, r)$ par $\sigma_j(z) = (z_j - x_j)/d$, $j = 1, \dots, n$:

$$f - F = \sum_{j=1}^n (z_j - x_j)/d \cdot v_j(z) \quad \text{sur } B(x, r), \text{ avec } v_1, \dots, v_n \in \mathcal{O}(B(x, r)) \text{ vérifiant :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{B(x,r)} \frac{|v_j(z)|^2}{(|z - x|/d)^{2n}} e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) &\leq 2 \int_{B(x,r)} \frac{|f(z) - F(z)|^2}{(|z - x|/d)^{2(n+1)}} e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) \\ &\leq 2C_2(r, d, n) C_f \leq \frac{C_3(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f. \end{aligned}$$

Comme $(|z - x|/d)^{2n} \leq (r/d)^{2n}$ sur $B(x, r)$, on obtient finalement

$$\sum_{j=1}^n \int_{B(x,r)} |v_j(z)|^2 e^{-2m\varphi(z)} d\lambda(z) \leq \frac{C_3(n)}{(r/d)^{2 \cdot 2}} C_f \leq \frac{C_3(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f. \quad (2)$$

Les estimations (1) et (2) démontrent le lemme si on pose $C(n) = \max\{C_2(n), C_3(n)\}$. \square

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat principal de cette Note.

Théorème 1.2. Soit φ une fonction plurisousharmonique sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, m un entier positif, et $(\sigma_{m,j})_{j \geq 0}$ une base orthonormée quelconque de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$.

Alors, pour tout point $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $B(x, r) \Subset \Omega$, il existe une constante $C(n)$ ne dépendant que de n , telle que pour $r' = \frac{r}{\sqrt{n}C(n)} (\frac{r}{d})^{n+2}$ on a la propriété suivante : pour toute section $f \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ avec

$$\int_{B(x,r)} |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda = C_f < +\infty,$$

il existe des fonctions holomorphes $b_{m,j} \in \mathcal{O}(B(x, r'))$, $j \geq 0$, telles que

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} b_{m,j} \sigma_{m,j} \quad \text{sur } B(x, r'),$$

et

$$\sup_{B(x,r')} \sum_{j=0}^{+\infty} |b_{m,j}|^2 \leq \frac{1}{(1-r/d)^2} \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}} C_f.$$

Démonstration. On pose $C(r, d, n) = C(n)(d/r)^{2(n+2)}$. Soit une section $f \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ comme dans l'énoncé. Le Lemme 1.1 donne l'existence d'une section globale $F \in \mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$ et de sections locales $v_1, \dots, v_n \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{J}(m\varphi))$ telles que

$$f - F = \sum_{j_1=1}^n (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdot v_{j_1}(z) \quad \text{sur } B(x, r), \text{ avec}$$

$$\int_{\Omega} |F|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq C(r, d, n) C_f \quad \text{et} \quad \sum_{j_1=1}^n \int_{B(x,r)} |v_{j_1}|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq C(r, d, n) C_f.$$

Par définition de la base orthonormée on a $F = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sigma_{m,k}$, avec $c_k \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \leq C(r, d, n) C_f$. En particulier,

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sigma_{m,k} + \sum_{j_1=1}^n (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdot v_{j_1}(z) \quad \text{sur } B(x, r).$$

Nous allons itérer ce procédé et continuer par récurrence. L'itération donne une version effective du lemme de Nakayama. On applique donc le Lemme 1.1 à chaque fonction v_{j_1} et on obtient :

$$v_{j_1} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,j_1} \sigma_{m,k} + \sum_{j_2=1}^n (z_{j_2} - x_{j_2})/d \cdot v_{j_1,j_2}(z) \quad \text{sur } B(x, r), \quad j_1 = 1, \dots, n,$$

avec $c_{k,j_1} \in \mathbb{C}$, $v_{j_1,j_2} \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{J}(m\varphi))$ tels que

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{k=0}^{+\infty} |c_{k,j_1}|^2 \leq C(r,d,n) \sum_{j_1=1}^n \int_{B(x,r)} |v_{j_1}|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq C(r,d,n)^2 C_f,$$

et

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \int_{B(x,r)} |v_{j_1,j_2}|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq \sum_{j_1=1}^n C(r,d,n) \int_{B(x,r)} |v_{j_1}|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq C(r,d,n)^2 C_f.$$

Par récurrence sur l on obtient, après applications successives du Lemme 1.1 :

$$v_{j_1,\dots,j_{l-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,j_1,\dots,j_{l-1}} \sigma_{m,k} + \sum_{j_l=1}^n (z_{j_l} - x_{j_l})/d \cdot v_{j_1,\dots,j_l} \quad \text{sur } B(x,r),$$

pour $j_1, \dots, j_{l-1} = 1, \dots, n$, avec $c_{k,j_1,\dots,j_{l-1}} \in \mathbb{C}$, $v_{j_1,\dots,j_l} \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{J}(m\varphi))$ satisfaisant les estimations

$$\sum_{j_1,\dots,j_{l-1}=1}^n \sum_{k=0}^{+\infty} |c_{k,j_1,\dots,j_{l-1}}|^2 \leq C(r,d,n)^l C_f \quad \text{et} \quad \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^n \int_{B(x,r)} |v_{j_1,\dots,j_l}|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq C(r,d,n)^l C_f.$$

On obtient ainsi :

$$f = \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^n (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdots (z_{j_l} - x_{j_l})/d \cdot v_{j_1,\dots,j_l} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(c_k + \sum_{\nu=1}^{l-1} \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^n c_{k,j_1,\dots,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d \right) \sigma_{m,k},$$

sur $B(x,r)$. Posons

$$b_{m,k} = c_k + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^n c_{k,j_1,\dots,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d, \quad k = 0, \dots, +\infty.$$

Nous allons vérifier maintenant que la série qui définit $b_{m,k}$ converge vers une fonction holomorphe sur $B(x,r')$, et que

$$\sup_{B(x,r')} \sum_{k=0}^{+\infty} |b_{m,k}|^2 \leq \frac{1}{(1-r/d)^2} C(r,d,n) C_f, \quad \text{où } r' = \frac{r}{\sqrt{n C(r,d,n)}} = \frac{r}{\sqrt{n C(n)}} \left(\frac{r}{d}\right)^{n+2}.$$

Comme $\sup_{B(x,r')} |(z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d|^2 \leq (r'/d)^{2\nu}$, on a, pour tout $1 \leq \nu < +\infty$, l'estimation

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^n c_{k,j_1,\dots,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d \right|^2 &\leq \left(\frac{r'}{d}\right)^{2\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^n |c_{k,j_1,\dots,j_\nu}| \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{r'}{d}\right)^{2\nu} n^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^n |c_{k,j_1,\dots,j_\nu}|^2 = \left(\frac{r'}{d}\right)^{2\nu} n^\nu \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^n \sum_{k=0}^{+\infty} |c_{k,j_1,\dots,j_\nu}|^2 \\ &\leq \left(\frac{r'}{d}\right)^{2\nu} n^\nu C(r,d,n)^{\nu+1} C_f = \left(\frac{r'}{d}\right)^{2\nu} C(r,d,n) C_f, \end{aligned}$$

sur $B(x, r')$. Posons

$$F_{v,k} = \sum_{j_1, \dots, j_v=1}^n c_{k, j_1, \dots, j_v} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdots (z_{j_v} - x_{j_v})/d, \quad \text{pour } k \geq 0 \text{ et } v \geq 1,$$

$$F_{0,k} = c_k, \quad \text{pour } k \geq 0.$$

Alors $b_{m,k} = \sum_{v=0}^{+\infty} F_{v,k}$. Nous avons déjà démontré que $\sum_{k=0}^{+\infty} |F_{v,k}|^2 \leq (r/d)^{2v} C(r, d, n) C_f$, $v \geq 0$, sur $B(x, r')$.

Soit $F_v = (F_{v,k})_{k \geq 0}$ avec la norme ponctuelle L^2 donnée par $|F_v| = (\sum_{k=0}^{+\infty} |F_{v,k}|^2)^{1/2}$. On a :

$$\left| \sum_{v=0}^{+\infty} F_v \right| \leq \sum_{v=0}^{+\infty} |F_v|, \quad \text{ce qui équivaut à } |(b_{m,k})_{k \geq 0}| \leq \sum_{v=0}^{+\infty} |(F_{v,k})_{k \geq 0}|, \quad \text{ou encore à}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_{m,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{v=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |F_{v,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{v=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{d} \right)^v \sqrt{C(r, d, n) C_f} = \frac{1}{1 - r/d} \sqrt{C(r, d, n) C_f},$$

sur $B(x, r')$. Le théorème est démontré. \square

Remerciements

Je remercie vivement mon directeur de thèse Jean-Pierre Demailly qui m'a constamment soutenu.

Références

- [1] A.M. Nadel, Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature, *Ann. of Math.* 132 (1990) 549–596.
- [2] Y.T. Siu, Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type, in : I. Bauer, et al. (Eds.), *Complex Geometry. Collection of papers dedicated to Hans Grauert on the occasion of his 70th birthday*, Springer, Berlin, 2002, pp. 223–277.
- [3] H. Skoda, Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 11 (4) (1978) 577–611.