Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 261–266

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Problèmes mathématiques de la mécanique

Comportement asymptotique d'une grue

Georges Griso

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), laboratoire Jacques-Louis Lions (analyse numérique), 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 23 octobre 2003 ; accepté le 10 novembre 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On étudie le comportement asymptotique d'une structure dépendant de deux petits paramètres. Les problèmes limites font intervenir le rapport de ces deux paramètres. ***Pour citer cet article : G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Asymptotic behavior of a crane. We study the asymptotic behaviour of a structure depending of two small parameters. The ratio of these two parameters plays a part in the limit problems. ***To cite this article: G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

A crane is a structure made of four big rods of length L and $4N$ smaller rods of length $\varepsilon = L/N$ regularly positionned. The cross section of each rod is a square of size $\varepsilon\delta$.

We find in [2] a first study of the passings to the limit: ε tends to 0, δ being fixed, then δ tends to 0. The displacement of the crane at the end of each of these convergences is of Bernoulli–Navier type. In [3] we begin with making δ tend to 0, ε being fixed, then ε tends to 0. At the end of these two passings to the limit we can realize that the four big crane rods are independent, the bending displacements are the solutions of differential equations of second order. For the same right-hand side of the elasticity problem the results we obtain in these two studies are different both in quality and in quantity.

In Section 3 we use the result demonstrated in [6]: any displacement u of the crane is the sum of an elementary displacement of a rods structure U_e and of a local residual displacement estimated by (1). The displacement U_e is linear in each cross section of the rods and coincides with a displacement rigid in the neighbourhood of the junctions. The first component $\mathcal{U}$ of U_e gives the displacement of the crane framework. In Theorem 3.1, we show that $\mathcal{U}$ is the sum of a Bernoulli–Navier displacement, of two complementary bending displacements $U_{f,1}$ and

Adresse e-mail : georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.11.023

$U_{f,2}$, and of a correcting extensional displacement x_1x_2S and of a local displacement $\widehat{\mathcal{U}}$. All the elements occuring in this decomposition of $\mathcal{U}$ are estimated according to the stress energy norm of u and the parameters ε and δ. These estimates make it clear that if ε/δ is small the displacement $\mathcal{U}$ is "near" a Bernoulli–Navier displacement and if ε/δ is big the long rods of the framework dissociate themselves from one another.

Our study will be about the transitional case: $(\varepsilon,\delta)\to(0,0)$ and ε/δ tends to a finite limit κ not equal to zero. We use the methods of the unfolding; both in the homogenization part (see [1]) and the elasticity part of the problem (see [5,6] and [4]).

In Section 5, we consider a sequence of displacements $u^{\varepsilon,\delta}$ the stress energy of which is of order $(\varepsilon\delta)^2$ and we obtain (3) the limits of the unfolded $\mathcal{T}_\delta\circ\mathcal{T}_\varepsilon(u^{\varepsilon,\delta})$ of the sequence $u^{\varepsilon,\delta}$ in terms of the limits of the displacements introduced in Theorem 3.1. The theorems of [1] and of [5] could allow us to state explicitly the limits of the unfolded of the strain tensor components.

The problem of elasticity (4) is posed in Section 6, with its right-hand side (5). Hence we can determine the local displacements and explicit (6) the limits of the stress tensor components. Theoreme 7.1 gives the variational problems depending on κ, verified by the Bernoulli–Navier displacement, by the complementary bendings, the extensional corrector and the torsion angle of the crane.

In this Note we use the Einstein convention of summation over repeated indices. As a rule, the Greek indices α and β take values in $\{1,2\}$, the Latin indices i and j take values in $\{-1,1\}$ and the Latin indices $h,\ k,\ l$ and m take values in $\{1,2,3\}$.

1. Introduction

On considère une structure formée de quatre grandes barres de longueur L et de $4N$ barres plus petites de longueur $\varepsilon=L/N$, régulièrement espacées. La section droite de chaque barre est un carré de côté $\varepsilon\delta$. Le problème de l'élasticité est posé dans ce domaine. Le comportement asymptotique de sa solution lorsque $(\varepsilon,\delta)\to(0,0)$, le rapport ε/δ tendant vers une limite finie non nulle, est obtenu par la méthode des éclatements.

2. Notations

Le squelette $\mathcal{S}^\varepsilon$ de la grue est formé par quatre segments de droite de longueur L et $4N$ segments de longueur ε. La cellule de base du squelette est l'ensemble Y des arêtes du cube $[-1/2,1/2]^2\times[0,1]$, non situées dans le plan $x_3=0$. La cellule de base de la structure $\mathcal{S}^\varepsilon_\delta$ est l'ensemble Y_δ formé de barres de section droite un carré de côté δ et d'axe une arête de Y, $\mathcal{S}^\varepsilon=\bigcup_{p=0}^{N-1}\varepsilon(p\vec{e}_3+Y)$, $\mathcal{S}^\varepsilon_\delta=\bigcup_{p=0}^{N-1}\varepsilon(p\vec{e}_3+Y_\delta)$.

Les segments de direction $\vec{e}_3$ de $\mathcal{S}^\varepsilon$ (resp. de Y) sont notés $\mathcal{S}^\varepsilon_{ij}$ (resp. Y_{ij}). Les segments latéraux de direction $\vec{e}_\alpha$ de $\mathcal{S}^\varepsilon$ (resp. de Y) sont notés $\mathcal{S}^\varepsilon_{i,\alpha p}=\varepsilon(p\vec{e}_3+Y_{i,\alpha})$ (resp. $Y_{i,\alpha}$) ($p\in\{1,\dots,N\}$). On utilise les mêmes notations pour les barres de $\mathcal{S}^\varepsilon_\delta$ (resp. de Y_δ).

Pour toute fonction ϕ appartenant à $L^2(\mathcal{S}^\varepsilon)$ (resp. $L^2(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta)$), on note ϕ_{ij} la restriction de ϕ à l'un des quatres segments $\mathcal{S}^\varepsilon_{ij}$ (resp. à l'une des quatres barres $\mathcal{S}^\varepsilon_{\delta,ij}$) et $\phi_{i,\alpha p}$ la restriction de ϕ à un segment latéral $\mathcal{S}^\varepsilon_{i,\alpha p}$ du squelette (resp. à une petite barre latérale $\mathcal{S}^\varepsilon_{\delta,i,\alpha p}$). Il en va de même pour les fonctions définies sur les cellules de base.

La structure $\mathcal{S}^\varepsilon_\delta$ est fixée sur la partie $\Gamma_{0,\delta}$ de sa frontière, contenue dans le plan $x_3=0$.

L'ensemble des déplacements admissibles de $\mathcal{S}^\varepsilon_\delta$ est $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta,\mathbf{R}^3)=\{u\in H^1(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta,\mathbf{R}^3)\mid u=0 \text{ sur } \Gamma_{0,\delta}\}$.

L'espace $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon)$ est l'ensemble des fonctions continues sur le squelette, nulles aux quatre points de $\Gamma_0=\mathcal{S}^\varepsilon\cap\{x_3=0\}$, et dont la dérivée au sens des distributions appartient à $L^2(\mathcal{S}^\varepsilon)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et u un déplacement de $H^1(\Omega,\mathbf{R}^3)$, on note

$$\mathcal{E}(u,\Omega)=\int_\Omega \gamma_{kl}(u)\gamma_{kl}(u),\qquad \mathcal{D}(u,\Omega)=\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l},\qquad \gamma_{kl}(u)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right\}.$$

3. Estimations des déplacements de $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta,\ \mathbf{R}^3)$

On rappelle le résultat suivant démontré dans [3] :

Pour tout déplacement u appartenant à $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta)$, il existe un déplacement élémentaire de structure-poutres $U_e\in H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta,\mathbf{R}^3)$ tel que

$$\|u-U_e\|^2_{L^2(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta,\mathbf{R}^3)}\leqslant C(\varepsilon\delta)^2\mathcal{E}\big(u,\mathcal{S}^\varepsilon_\delta\big),\qquad \mathcal{D}\big(u-U_e,\mathcal{S}^\varepsilon_\delta\big)+\mathcal{E}\big(U_e,\mathcal{S}^\varepsilon_\delta\big)\leqslant C\mathcal{E}\big(u,\mathcal{S}^\varepsilon_\delta\big). \tag{1}$$

Les constantes sont indépendantes de ε et δ. Dans les barres $\mathcal{S}^\varepsilon_{\delta,ij}$ le déplacement U_e s'écrit

$$U_{e,ij}(x)=\mathcal{U}_{ij}(x_3)+\mathcal{R}_{ij}(x_3)\wedge\left[\left(x_1-\frac{(-1)^I}{2}\varepsilon\right)\vec e_1+\left(x_2-\frac{(-1)^J}{2}\varepsilon\right)\vec e_2\right],\quad I=\frac{1-i}{2},\ J=\frac{1-j}{2}.$$

Théorème 3.1. *Les composantes $(\mathcal{U},\mathcal{R})\in(H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon,\mathbf{R}^3))^2$ de U_e se décomposent de la façon suivante :*

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix} U_{F,1}(x_3)+U_{f,1}(x_3)-x_2\tau(x_3)\\ U_{F,2}(x_3)+U_{f,2}(x_3)+x_1\tau(x_3)\\ U_3(x_3)-x_1\frac{\mathrm{d}U_{F,1}}{\mathrm{d}x_3}(x_3)-x_2\frac{\mathrm{d}U_{F,2}}{\mathrm{d}x_3}(x_3)+x_1x_2S(x_3)\end{pmatrix}+\widehat{\mathcal{U}},\qquad \mathcal{R}=\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{d}U_{F,2}}{\mathrm{d}x_3}(x_3)\\ \frac{\mathrm{d}U_{F,1}}{\mathrm{d}x_3}(x_3)\\ \tau(x_3)\end{pmatrix}+\widehat{\mathcal{R}}.$$

- *$U_3,\ S,\ U_{f,1},\ U_{f,2}$ et τ appartiennent à $\mathcal{V}_1$,*
- *$U_{F,1}$ et $U_{F,2}$ appartiennent à $\mathcal{V}_2$,*
- *$\widehat{\mathcal{U}}$ et $\widehat{\mathcal{R}}$ appartiennent à $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}^\varepsilon,\mathbf{R}^3)$. On a de plus les estimations*

$$\begin{aligned}&\|U_3\|^2_{\mathcal{V}_1}+\varepsilon^2\|U_{F,\alpha}\|^2_{\mathcal{V}_2}+\varepsilon^4\|S\|^2_{\mathcal{V}_1}+(\varepsilon\delta)^2\|S\|^2_{L^2(0,L)}+\delta^2\|U_{f,\alpha}\|^2_{\mathcal{V}_1}+(\varepsilon\delta)^2\|\tau\|^2_{\mathcal{V}_1}\\ &\quad+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\|\widehat{\mathcal{U}}\|^2_{L^2(\mathcal{S}^\varepsilon,\mathbf{R}^3)}+\delta^2\|\widehat{\mathcal{U}}\|^2_{H^1(\mathcal{S}^\varepsilon,\mathbf{R}^3)}+\delta^2\|\widehat{\mathcal{R}}\|^2_{L^2(\mathcal{S}^\varepsilon,\mathbf{R}^3)}+(\varepsilon\delta)^2\|\widehat{\mathcal{R}}\|^2_{H^1(\mathcal{S}^\varepsilon,\mathbf{R}^3)}\leqslant C\frac{\mathcal{E}(u,\mathcal{S}^\varepsilon_\delta)}{(\varepsilon\delta)^2},\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{V}_1=\big\{\phi\in H^1(0,L)\mid\phi(0)=0\big\},\qquad \mathcal{V}_2=\big\{\phi\in H^2(0,L)\mid\phi(0)=\phi'(0)=0\big\}.$$

Démonstration. On définit $U_3,\ U_{F,\alpha}$ et S pour avoir $\widehat{\mathcal{U}}_{3,ij}=0$. L'angle de torsion τ de la structure est la moyenne des restrictions $\mathcal{R}_{3,ij}$. Les déplacements complémentaires de flexion $U_{f,\alpha}$ sont les différences des moyennes de $\mathcal{U}_{\alpha,ij}$ et $U_{F,\alpha}$. Les estimations sont les conséquences de (1).

4. Les opérateurs d'éclatement

L'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$ de $L^2(\mathcal{S}^\varepsilon)$ (resp. $L^2(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta)$) dans $L^2(]0,L[\times Y)$ (resp. $L^2(]0,L[Y_\delta)$) est défini par (voir [1])

$$\forall\phi\in L^2\big(\mathcal{S}^\varepsilon\big)\ \big(\text{resp. } L^2\big(\mathcal{S}^\varepsilon_\delta\big)\big)\quad \mathcal{T}_\varepsilon(\phi)(x_3,y)=\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x_3}{\varepsilon}\right]\vec e_3+\varepsilon y\right),\quad y\in Y\ (\text{resp. } Y_\delta),$$

où $[t]$ est la partie entière du réelle t.

L'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\delta$ de $L^2(Y_\delta)$ dans $L^2(Y\times\omega)$ est défini par (voir [5,6] et [4])

$$\forall\phi\in L^2(Y_\delta),\quad \mathcal{T}_\delta(\phi)(y,z)=\begin{cases}\phi_{ij}(y+\delta z_1\vec{e}_1+\delta z_2\vec{e}_2), & z=(z_1,z_2)\in\omega, \quad y\in Y_{ij},\\ \phi_{i,\alpha p}(y+\delta z_{3-\alpha}\vec{e}_{3-\alpha}+\delta z_3\vec{e}_3), & z=(z_{3-\alpha},z_3)\in\omega,\quad y\in Y_{i,\alpha},\end{cases}$$

où $\omega=]-1/2,1/2[^2$ est la section droite de référence des barres de Y_δ.

5. Limite d'une suite de déplacements de $\mathcal{S}_\delta^\varepsilon$

On suppose que $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$ et $\varepsilon/\delta\to\kappa\in]0,+\infty[$.

Soit $u^{\varepsilon,\delta}$ une suite de déplacements appartenant à $H^1_{\Gamma_0}(\mathcal{S}_\delta^\varepsilon,\mathbf{R}^3)$ vérifiant $\mathcal{E}(u^{\varepsilon,\delta},\mathcal{S}_\delta^\varepsilon)\leqslant C(\varepsilon\delta)^2$. Le déplacement $u^{\varepsilon,\delta}$ est la somme d'un déplacement élémentaire de structure-poutres $U_e^{\varepsilon,\delta}$ et d'un déplacement résiduel $u^{\varepsilon,\delta}-U_e^{\varepsilon,\delta}$ vérifiant les estimations (1). Les deux composantes de $U_e^{\varepsilon,\delta}$ se décomposent comme il a été fait au Théorème 3.1. On extrait de toutes ces suites des sous-suites encore notées de la même façon telles que

$$\begin{cases}\bullet\quad U_3^{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup U_3,\quad \delta U_{f,\alpha}^{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup U_{f,\alpha},\quad \varepsilon^2S^{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup S,\quad \varepsilon\delta\tau^{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup\tau\quad \text{dans } \mathcal{V}_1 \text{ faible},\\ \bullet\quad \varepsilon U_{F,\alpha}^{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup U_{F,\alpha}\qquad \text{dans } \mathcal{V}_2 \text{ faible},\\ \bullet\quad \dfrac{\delta}{\varepsilon}\mathcal{T}_\varepsilon\big(\widehat{\mathcal{U}}^{\varepsilon,\delta}\big)\rightharpoonup\widehat{\mathcal{U}},\quad \delta\mathcal{T}_\varepsilon\big(\widehat{\mathcal{R}}^{\varepsilon,\delta}\big)\rightharpoonup\widehat{\mathcal{R}}\quad \text{dans } L^2\big(]0,L[,H^1\big(Y,\mathbf{R}^3\big)\big)\text{ faible.}\end{cases}\tag{2}$$

On introduit $L^2(]0,L[,H^1_{\rm per}(Y))=\{\phi\in L^2(]0,L[,H^1(Y))\mid y\to\phi(\cdot,y)$ périodique de période $\vec{e}_3\}$. Les fonctions vectorielles $\widehat{\mathcal{U}}$ et $\widehat{\mathcal{R}}$ appartiennent à $L^2(]0,L[,H^1_{\rm per}(Y,\mathbf{R}^3))$. L'estimation (1) de l'énergie de déformation de $U_e^{\varepsilon,\delta}$ conduit en passant à la limite aux relations liant $\widehat{U}$ et $\widehat{R}$ aux déplacements globaux. Ces relations donnent également les premières conditions locales de jonction,

$$\frac{{\rm d}\widehat{\mathcal{U}}_{\alpha,ij}}{{\rm d}y_3}+(-1)^\alpha\widehat{\mathcal{R}}_{3-\alpha,ij}+\frac{{\rm d}U_{f,\alpha}}{{\rm d}x_3}\frac{24y_3(1-y_3)-1}{3}+(-1)^\alpha y_{3-\alpha}\frac{{\rm d}\tau}{{\rm d}x_3}=0,\quad \text{dans } L^2\big(]0,L[\times Y_{ij}\big),$$
$$\frac{{\rm d}\widehat{\mathcal{U}}_{i,\alpha}}{{\rm d}y_\alpha}-\widehat{\mathcal{R}}_{i,\alpha}\wedge\vec{e}_\alpha+y_{3-\alpha}\frac{S}{\kappa}\vec{e}_3=0,\quad \text{dans } L^2\big(]0,L[\times Y_{i,\alpha},\mathbf{R}^3\big).$$

5.1. *Limites des éclatés des déplacements*

Grâce aux estimations (1) et aux convergences (2), on a les convergences faibles suivantes dans $L^2(]0,L[\times Y\times\omega)$:

$$\begin{cases}\varepsilon\mathcal{T}_\delta\circ\mathcal{T}_\varepsilon\big(u_1^{\varepsilon,\delta}\big)\rightharpoonup U_{F,1}+\kappa(U_{f,1}-y_2\tau),\quad \varepsilon\mathcal{T}_\delta\circ\mathcal{T}_\varepsilon\big(u_2^{\varepsilon,\delta}\big)\rightharpoonup U_{F,2}+\kappa(U_{f,2}+y_1\tau),\\ \mathcal{T}_\delta\circ\mathcal{T}_\varepsilon\big(u_3^{\varepsilon,\delta}\big)\rightharpoonup U_3-y_1\dfrac{{\rm d}U_{F,1}}{{\rm d}x_3}-y_2\dfrac{{\rm d}U_{F,2}}{{\rm d}x_3}+y_1y_2S.\end{cases}\tag{3}$$

On peut également donner les limites des éclatés des composantes du tenseur des déformations (voir [5,6] et [4]).

6. Le problème de l'élasticité

Soit, dans $\mathcal{S}_\delta^\varepsilon$, le système de l'élasticité donné sous forme variationnel

$$u^{\varepsilon,\delta}\in H^1_{\Gamma_0}\big(\mathcal{S}_\delta^\varepsilon,\mathbf{R}^3\big),\qquad \int_{\mathcal{S}_\delta^\varepsilon}a_{hklm}\gamma_{hk}\big(u^{\varepsilon,\delta}\big)\gamma_{lm}(v)=\int_{\mathcal{S}_\delta^\varepsilon}F^{\varepsilon,\delta}\cdot v\quad \forall v\in H^1_{\Gamma_0}\big(\mathcal{S}_\delta^\varepsilon,\mathbf{R}^3\big),\tag{4}$$

où $a_{hklm} = \lambda\delta_{hk}\delta_{lm} + \mu(\delta_{hl}\delta_{km} + \delta_{hm}\delta_{kl})$. Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau. On prend, pour simplifier, des forces appliquées de volume dont le support est contenu dans les gandes barres.

$$F^{\varepsilon,\delta}_{1,ij} = \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon+\delta} f_{1,ij} - (-1)^J \delta f_T, \qquad F^{\varepsilon,\delta}_{2,ij} = \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon+\delta} f_{2,ij} + (-1)^I \delta f_T, \qquad F^{\varepsilon,\delta}_{3,ij} = f_{3,ij}, \tag{5}$$

où $f \in L^2(]0,L[,\mathbf{R}^3)$ et $f_T \in L^2(0,L)$. La solution de (4) vérifie l'inégalité $\mathcal{E}(u^{\varepsilon,\delta}, \mathcal{S}^{\varepsilon}_{\delta}) \leqslant C(\varepsilon\delta)^2$. La constante est indépendante de ε et δ.

7. Limites du tenseur des contraintes et problèmes limites

Par un choix convenable de déplacement-tests, on détermine $\widehat{U}$ et $\widehat{R}$; ce qui permet d'expliciter les limites des éclatés des composantes du tenseur des contraintes. Dans les éclatés des barres de direction $\vec{e}_3$, on obtient les limites faibles suivantes dans $L^2(]0,L[\times Y_{ij}\times\omega)$:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_\delta \circ \mathcal{T}_\varepsilon\big(\sigma_{33}\big(u^{\varepsilon,\delta}_{ij}\big)\big) \rightharpoonup E\Big[\dfrac{\mathrm{d}U_{3,ij}}{\mathrm{d}x_3} + 2(2y_3-1)z_1\dfrac{\mathrm{d}U_{f,1}}{\mathrm{d}x_3} + 2(2y_3-1)z_2\dfrac{\mathrm{d}U_{f,2}}{\mathrm{d}x_3} \\ \qquad\qquad - \dfrac{6(2y_3-1)}{3E+4\mu K}\Big\{(z_1y_2 - z_2y_1)(E+4\mu K)\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x_3} - (z_1y_2+z_2y_1)E\dfrac{S}{\kappa}\Big\}\Big], \\ \mathcal{T}_\delta \circ \mathcal{T}_\varepsilon\big(\sigma_{13}\big(u^{\varepsilon,\delta}_{ij}\big)\big) \rightharpoonup \dfrac{\mu}{2}\Big[\dfrac{\partial\chi}{\partial z_1} - z_2\Big]\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x_3}, \quad \mathcal{T}_\delta \circ \mathcal{T}_\varepsilon\big(\sigma_{23}\big(u^{\varepsilon,\delta}_{ij}\big)\big) \rightharpoonup \dfrac{\mu}{2}\Big[\dfrac{\partial\chi}{\partial z_2} + z_1\Big]\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x_3}, \\ \mathcal{T}_\delta \circ \mathcal{T}_\varepsilon\big(\sigma_{\alpha\beta}\big(u^{\varepsilon,\delta}_{ij}\big)\big) \rightharpoonup 0, \end{cases} \tag{6}$$

où

$$\frac{\mathrm{d}U_{3,ij}}{\mathrm{d}x_3} = \frac{\mathrm{d}U_3}{\mathrm{d}x_3} - y_1\frac{\mathrm{d}^2U_{F,1}}{\mathrm{d}x_3^2} - y_2\frac{\mathrm{d}^2U_{F,2}}{\mathrm{d}x_3^2} + y_1y_2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_3},$$

où χ est la solution de

$$\chi \in H^1(\omega), \quad \int_\omega \chi = 0, \quad \int_\omega \nabla\chi\nabla\psi = \int_\omega \Big\{z_2\frac{\partial\psi}{\partial z_1} - z_1\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\Big\}, \quad \forall\psi \in H^1(\omega),$$

et où $K = 1/6 - \|\nabla\chi\|^2_{[L^2(\omega)]^2}$ est une constante strictement positive. On peut également donner, dans les éclatés des barres de direction $\vec{e}_\alpha$, les limites des composantes du tenseur des contraintes.

Théorème 7.1. *Le déplacement extensionnel moyen $U_3 \in \mathcal{V}_1$ est solution de*

$$E\int_0^L \frac{\mathrm{d}U_3}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x_3} = \int_0^L f_3\phi, \quad \forall\phi \in \mathcal{V}_1.$$

Le correcteur extensionnel $S \in \mathcal{V}_1$ est solution de

$$E\Big\{\int_0^L \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x_3} + \frac{8}{\kappa^2}\frac{E+2\mu K}{3E+4\mu K}\int_0^L S\phi\Big\} = \int_0^L (-1)^{(i+j-2)/2} f_{3,ij}\phi, \quad \forall\phi \in \mathcal{V}_1.$$

Le déplacement de flexion $U_{F,\alpha} \in \mathcal{V}_2$ est solution de ($\alpha = 1 \Rightarrow s = i,\ \alpha = 2 \Rightarrow s = j$)

$$\frac{E}{4}\int_0^L \frac{\mathrm{d}^2U_{F,\alpha}}{\mathrm{d}x_3^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x_3^2} = \frac{1}{1+\kappa}\int_0^L f_\alpha\Phi - \int_0^L \sum_{i,j=-1}^{1} \frac{(-1)^{(s-1)/2}}{4} f_{3,ij}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_3}, \quad \forall\Phi \in \mathcal{V}_2.$$

Le déplacement complémentaire de flexion $U_{f,\alpha} \in \mathcal{V}_1$ est solution de

$$\frac{E}{3}\int_0^L \frac{\mathrm{d}U_{f,\alpha}}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x_3} = \frac{\kappa}{1+\kappa}\int_0^L f_\alpha \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_1.$$

La torsion $\tau \in \mathcal{V}_1$ est solution de

$$\left\{2E\frac{E+4\mu K}{3E+4\mu K} + \mu K\right\}\int_0^L \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x_3} = \int_0^L \left[f_T + \frac{\kappa}{1+\kappa}\sum_{i,j=-1}^{1}\frac{(-1)^{(i-1)/2}f_{2,ij} - (-1)^{(j-1)/2}f_{1,ij}}{8}\right]\phi.$$

La fonction vectorielle f est la moyenne des f_{ij} et E est le module de Young.

8. Conclusion

Si ε tend vers 0, δ étant fixé, puis δ tend vers 0 ou si le rapport ε/δ tend vers 0, les problèmes limites sont ceux que l'on obtient en faisant tendre κ vers 0. Le déplacement global de la structure est de type Bernoulli–Navier. Si δ tend vers 0, ε étant fixé, puis ε tend vers 0 ou si le rapport ε/δ tend vers $+\infty$, les problèmes limites sont ceux que l'on obtient en faisant tendre κ vers $+\infty$. Les déplacements extensionnels des quatre grandes barres sont indépendants.

Références

[1] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 99–104.
[2] D. Cioranescu, J. Saint Jean-Paulin, Reinforced and honeycomb structures, J. Math. Pures Appl. 65 (1986) 403–422.
[3] G. Griso, Études asymptotiques de structures réticulées minces, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1995.
[4] G. Griso, Comportement asymptotique d'une structure formée de plaques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 1001–1006.
[5] G. Griso, Asymptotic behavior of curved rods by the unfolding method, in press.
[6] G. Griso, Asymptotic behavior of structures made of curved rods, in press.