

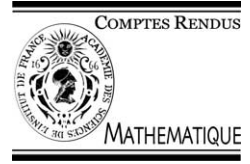


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 611–616



Contrôle optimal

Comment établir des conditions nécessaires d'optimalité dans les problèmes de contrôle dont certains arguments sont déviés ?

Lassana Samassi, Rabah Tahraoui

CEREMADE, UMR C.N.R.S. 7534, Université Paris 9 – Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

Reçu le 9 juillet 2003 ; accepté après révision le 18 novembre 2003

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous présentons une idée générale pour établir des conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de recherche d'extrémum lorsque le critère considéré possède certains de ses arguments déviés. **Pour citer cet article : L. Samassi, R. Tahraoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2004 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

How to state necessary optimality conditions for control problems with deviating arguments? We give a general idea to state necessary optimality conditions for problems of variational calculus or optimal control problems with deviating arguments. **To cite this article: L. Samassi, R. Tahraoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2004 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

Abridged English version

A large class of physical problems deals with finding extrema of functional $J(x)$ defined on some functional subspace E of classical one like Sobolev space, and which has the following form:

$$J(x) = \int_0^1 h(t, x \circ \theta(t), x' \circ \varphi(t)) dt, \quad (1)$$

where $\theta(\cdot)$ and $\varphi(\cdot)$ are deviating functions which satisfy, for instance, $\theta([0, 1]) = [0, 1]$, $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$. The goal is, for instance, to find $x \in E$ minimizing $J(\cdot)$. We denote this problem by:

$$\inf[J(x) \mid x \in E]. \quad (2)$$

Such problems have been studied by many people: for instance [2,4] and [9,6] (cf. referencies of these works). If a solution \bar{x} of (2) exists, then we can ask the following natural question: how to establish Euler–Lagrange equation.

Adresses e-mail : samassi@ceremade.dauphine.fr (L. Samassi), tahraoui@ceremade.dauphine.fr (R. Tahraoui).

In our approach we propose a general idea to state, for a large class of problems (optimization, optimal control), necessary conditions of optimality. Our method applied to problem (2) gives:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle v_t^\theta, h(\cdot, \bar{u}(t), \bar{u}' \circ \varphi(\cdot)) \rangle + \sum_{i \in I} \delta_{t_i} \int_{\theta=t_i} \frac{\partial h}{\partial \eta}(t, \bar{u} \circ \theta, \bar{u}' \circ \varphi) dt - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \langle \mu_t^Q, h(\cdot, \bar{u} \circ \theta(\cdot), \bar{u}'(t)) \rangle \right] = 0 \quad (3)$$

in $\mathcal{D}'([0,1])$. v_t^θ and μ_t^Q stand for two counting measures defined from, respectively, the deviations $\theta(\cdot)$ and $\varphi(\cdot)$, I is a subset of \mathbb{N} and the real numbers t_i verify: $|\{s \in [0, 1] \mid \theta(s) = t_i\}| > 0 \forall i \in I$. And $\varphi(\cdot)$ satisfies:

(*) for any measurable subset of $[0, 1]$ such that if $|e| = 0$ we have $|Q^{-1}(e)| = 0$.

1. Introduction

De nombreux problèmes physiques ont une formulation qui consiste à optimiser un critère – une énergie par exemple – donné par une fonctionnelle intégrale dont l'intégrande possède certains de ses arguments déviés, i.e. des problèmes avec contraintes du type

$$\inf_{(x,v) \in \mathcal{Uad}} \int_0^1 f(t, x(t), x \circ \theta_v(t), \theta_v, v) dt, \quad (4)$$

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \theta'_v = g(t, \theta_v, v), \quad \theta(0) = 0, \quad \theta_v(t) \in [0, 1] \quad \forall t. \quad (5)$$

\mathcal{Uad} est un ensemble de contrôles admissibles de type classique, i.e. un sous-ensemble convexe d'espaces fonctionnels classiques. La fonction d'état θ joue le rôle de la déviation. Cette question n'est pas purement académique. En effet, dans [3,4] les auteurs ont établi et étudié un modèle très intéressant de finance mathématique : il s'agit d'un investissement avec taxes dont le paiement s'effectue avec un certain délai endogène ; et dans [1] les auteurs attirent l'attention sur l'importance des problèmes du type précédent, et la nécessité de leur étude. Lorsque la déviation θ est fixe et donnée, on aboutit à un problème de calcul des variations qui s'exprime par :

$$\inf_{x \in E} \int_0^1 h(t, x \circ \theta(t), x' \circ \varphi(t)) dt, \quad (6)$$

où $(h(t, \eta, \xi))$ est une fonction convenablement choisie, E est un sous-ensemble d'un espace fonctionnel de type Sobolev, θ et φ étant deux déviations convenables, satisfaisant pour simplifier les notations et le cadre $\theta([0, 1]) = [0, 1]$, $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$. De telles questions sont abordées aussi dans [5] et [6].

Lorsque l'existence d'une solution pour (4) ou (6) est prouvée, se pose alors la question naturelle suivante : comment établir des conditions nécessaires – éventuellement nécessaires et suffisantes – d'optimalité satisfaites par cette solution ? Lorsqu'il s'agit du problème (6), c'est l'équation – ou l'inéquation – d'Euler–Lagrange de (6) dénommée ainsi, par analogie avec le cas classique. La présence de déviations rend la méthode classique du calcul des variations inopérente comme l'ont constaté les auteurs de [3] et [1]. Nous nous proposons dans ce travail de donner une idée générale qui permet d'établir pour les problèmes (4) et (6) des conditions nécessaires d'optimalité plus précises, à notre connaissance, que celles existant jusqu'alors dans la littérature. Elles possèdent en un certain sens un caractère local, i.e. elles ne sont pas totalement moyennées comme dans [1] ; également elles ont une forme moins faible que dans [3].

De plus, comme les problèmes de la forme (6) peuvent exprimer le caractère dégénéré de certains phénomènes, cette dégénérescence se traduit dans l'équation « d'Euler–Lagrange » par la présence de masses de Dirac. Dans le cadre, volontairement simple, des fonctions scalaires notre résultat s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle v_t^\theta, h(\cdot, \bar{u}(t), \bar{u}' \circ \varphi(\cdot)) \rangle + \sum_{i \in I} \delta_{t_i} \int_{\theta=t_i} \frac{\partial h}{\partial \eta}(t, \bar{u} \circ \theta, \bar{u}' \circ \varphi) dt - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \langle \mu_t^\varphi, h(\cdot, \bar{u} \circ \theta(\cdot), \bar{u}'(t)) \rangle \right] = 0. \quad (7)$$

Les dérivations sont prises au sens des distributions $\mathcal{D}'_i([0, 1])$, v_t^θ et μ_t^φ désignent des mesures de comptage dépendant respectivement des déviations $\theta(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$. Les réels t_i sont supposés en nombre au plus dénombrable tels que :

$$|\{t \in [0, 1] \mid \theta(t) = t_i\}| > 0.$$

Par contre $\varphi(\cdot)$ est supposée satisfaire : $\forall e$ mesurable de $[0, 1]$ tel que $|e| = 0$, on a $|\varphi^{-1}(e)| = 0$. Il convient de remarquer qu'il existe dans (7) des arguments non moyennés : $\bar{u}(\cdot)$ et $\bar{u}'(\cdot)$. Le caractère singulier explicite exprimé par la partie masse de Dirac est absent dans les travaux antérieurs.

2. Equation d'Euler–Lagrange du problème (6)

On se donne une fonction $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \eta, \xi) \rightarrow h(x, \eta, \xi)$, régulière en (η, ξ) à x fixé, convexe en ξ . Tous les résultats de ce travail sont obtenus pour $N \geq 1$. Nous présentons l'essentiel de nos idées dans le cadre $N = 1$; ce qui permet de simplifier notablement la présentation. Nous supposons les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} a_1 |\xi|^p + b_1 \leq h(x, \eta, \xi) \leq a_2 |\xi|^p + b_2, & a_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad p > 1, \\ \left| \frac{\partial h}{\partial \eta}(x, \eta, \xi) \right| \leq a_3 |\xi|^{p-1} + b_3, & a_3 > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Afin de simplifier les notations, les déviations $\theta(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ sont prises telles que $\theta([0, 1]) = [0, 1]$, $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$ avec $\theta(\cdot)$ continue.

$$\begin{cases} |\theta'| \in L^p(0, 1), \quad \frac{1}{|\theta'|} \in L^\mu(0, 1), \quad s \rightarrow \text{card} \theta^{-1}(s) \in L^v(0, 1) \quad \text{avec} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu} \leq 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{v} - \frac{1}{v} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu} \right) \leq 1, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Les dérivations s'entendent, pour θ et φ , au sens presque partout. De même,

$$|\varphi'| \in L^{\rho'}(0, 1), \quad \frac{1}{|\varphi'|} \in L^{\mu'}(0, 1), \quad s \rightarrow \text{card} \varphi^{-1}(s) \in L^{v'}(0, 1), \quad \rho', \mu', v' \quad (10)$$

satisfaisant les deux inégalités ci-dessus. De plus pour tout mesurable e de $[0, 1]$ tel que $|e| = 0$, on a $|\varphi^{-1}(e)| = 0$. Soit u une solution de (6) dans l'espace $W = \{v \in L^1(0, 1) \mid v' \in L^p((0, 1), d\mu^\varphi/dm), v(0) = v(1) = 0\}$, [7], où $d\mu^\varphi/dm$ est la dérivée au sens de Radon–Nikodym, par rapport à la mesure de Lebesgue, de la mesure μ^φ définie par : pour tout mesurable e , $\mu^\varphi(e) = |\varphi^{-1}(e)|$.

Il existe une famille de réels $(t_i)_{i \in I}$, avec I vide ou au plus dénombrable, telle que l'on ait :

$$|\{s \in [0, 1] \mid \theta(s) = t_i\}| > 0, \quad \forall i \in I. \quad (11)$$

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses (8) à (11), toute solution u de (5) satisfait l'équation suivante :*

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle v_t^\theta, h(\cdot, u(t), u' \circ \varphi(\cdot)) \rangle + \sum_{i \in I} \delta_{t_i} \int_{\theta=t_i} \frac{\partial h}{\partial \eta}(t, u \circ \theta, u' \circ \varphi) dt - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \langle \mu_t^\varphi, h(\cdot, u \circ \theta(\cdot), u'(t)) \rangle \right] = 0. \quad (12)$$

Les dérivations par rapport à t sont prises au sens des distributions. v_t^θ et μ_t^φ sont des mesures de comptage.

Remarque 1. Dans (3) les termes $\partial/\partial\eta\langle v_t^\theta, h(\cdot) \rangle$ et $\partial/\partial\xi\langle \mu_t^\varphi, h(\cdot) \rangle$ sont en réalité assez réguliers : ils appartiennent à des espaces de type $L_t^r(0, 1)$, $r \geq 1$.

Remarques 2.

- (i) À des difficultés techniques près, cette idée simple est fructueuse dans de nombreux problèmes [8].
- (ii) Lorsque $(\eta, \xi) \rightarrow h(t, \eta, \xi)$ est une fonction convexe et si le cadre est assez régulier, les conditions nécessaires d'optimalité sont suffisantes pour assurer l'existence d'une solution du problème (6).

2.1. Application à la régularité des solutions de (6)

Nous supposons :

$$\forall t \quad |\{s \in [0, 1] \mid \theta(s) = t\}| = 0. \quad (13)$$

Nous avons le résultat suivant.

Corollaire 2.2. On suppose les hypothèses ci-dessus permettant d'établir (12) sans masses de Dirac pour une solution u de (6). Alors :

- (i) si $|\varphi'(t)| \leq C_0$ p.p. t on a $u' \in L^\infty(0, 1)$;
- (ii) si $k(t) = [\sum_{x \in \varphi^{-1}(t)} 1/|\varphi'(x)|]^{-1} \in L^p(0, 1)$, $u' \in L^p(0, 1)$.

3. Conditions nécessaires d'optimalité dans les problèmes (4) de contrôle où l'état joue le rôle d'une déviation

Il s'agit de problèmes du type par exemple :

$$\inf \int_0^1 f(t, v, v', v \circ \theta, \theta, c) dt = J(v, c) \quad (14)$$

sous la contrainte d'état, volontairement simplifiée, $d\theta/dt = c$, $\theta(0) = 0$, où le contrôle c appartient à $\mathcal{U}_{ad} = \{c \in L^1(0, 1) \mid c(t) \geq 0, \int_0^t c(s) ds \in [0, 1], \forall t \in [0, 1]\}$, le contrôle v appartient à $W_0^{1,p}(0, 1)$ avec $p > 1$. L'intégrande f est assujettie à des hypothèses de régularité et de croissance convenables que nous omettons. Ces hypothèses classiques, sont nécessaires pour la recherche de l'existence de (14) et pour la dérivation de $J(\cdot, \cdot)$ au point de minimum. On note les différents arguments $f(t, \eta_1, \xi, \eta_2, v, \lambda)$.

Théorème 3.1. Supposons qu'il existe (\bar{u}, \bar{c}) solution de (14) telle que $\bar{u}' \circ \theta_{\bar{c}}(t)$ existe $\forall t$. Alors (\bar{u}, \bar{c}) satisfait les relations suivantes :

- (i) $\frac{\partial f}{\partial \eta_1}(t, \bar{u}, \bar{c}) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} \langle \mu_t, f(\cdot, \bar{u}(\cdot), \bar{u}'(\cdot), \bar{u}(t), t, \bar{c}(\cdot)) \rangle + \sum_{i \in I} \delta_{t_i} \cdot \int_{\theta=t_i} \frac{\partial f}{\partial \eta_2}(s, \bar{u}, \bar{c}) ds - \frac{d}{dt} [\frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \bar{u}, \bar{c})] = 0$ dans $\mathcal{D}'_t([0, 1])$, où on a noté $f(s, \bar{u}, \bar{c}) = f(s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s), \bar{u} \circ \theta(s), \theta(s), \bar{c}(s))$, I désigne un ensemble au plus dénombrable et μ_t représente une mesure de comptage liée à la déviation $\theta = \theta_{\bar{c}}$. Les réels t_i satisfont $|\{s \in [0, 1] \mid \theta_{\bar{c}}(s) = t_i\}| > 0$, δ_{t_i} est la mesure de Dirac au point t_i ; I pouvant être vide.
- (ii) $\bar{c}(t) \cdot [\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \bar{u}, \bar{c}) - \int_t^1 (\frac{\partial f}{\partial \eta_2}(s, \bar{u}, \bar{c}) \cdot \bar{u}' \circ \theta + \frac{\partial f}{\partial v}(s, \bar{u}, \bar{c})) ds] = 0$ p.p. $t \in [0, 1]$, qui est une inéquation intégrodifférentielle à arguments déviés.

La preuve utilise les mêmes ingrédients que précédemment.

Remarque 3. Formellement le cas général de l'équation d'état

$$\begin{cases} \theta'_v(t) = g(t, \theta_v(t), v) & \text{dans }]0, 1[, \\ \theta_v(0) = 0, \end{cases}$$

ne pose pas de problème supplémentaire et sera donné dans [8].

3.1. Application à un problème de marché financier

Le modèle de Jouini–Koehl–Touzi [3,4]. Nous allons traiter le cas régulier comme dans [3]. Le cas non régulier fera l'objet d'un travail ultérieur. Pour être complet, nous présentons brièvement ce modèle. Le marché financier consiste en la vente d'un bien sans risque, dont la fonction prix est donnée par $S(t)$. On suppose que la vente est assujettie à une taxe sur les bénéfices suivant la loi dite "first-in-first-out", d'après laquelle tout contrat soldé au temps t doit être le plus ancien du portefeuille au temps t . Soit $(t, u) \in \Delta = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq t \leq 1\}$. Pour chaque unité monétaire investie au temps u et vendue au temps t , on note $\varphi(t, u)$ le bénéfice après impôt reçu au temps t ; $\varphi(t, u)$ est supposé C^1 décroissante en t et croissante en u . Soit $x(t)$ le taux d'investissement du bien financier au temps t ; le taux de vente de ce bien au temps t est $y(t) = x \circ \theta(t) \cdot \theta'(t)$ p.p. t – (cf. [3]) – où $\theta(\cdot)$ est la fonction délai donnée par :

$$\theta(t) = \sup \left[s \in [0, 1] \mid \int_0^s x(u) \, du \leq \int_0^t y(u) \, du \right].$$

On a : $\theta(0) = 0$, $0 \leq \theta(t) \leq t$. La stratégie de vente est telle que $\int_0^t y(s) \, ds \leq \int_0^t x(s) \, ds$. Les deux fonctions auxiliaires utiles dans la formulation du problème sont : $z(t) = x(t) \cdot S(t)$ et $v(t) \geq 0$, telle que $\theta'(t) = v(t)$. A l'aide de ces deux dernières le problème de contrôle de l'agent consiste à maximiser la fonctionnelle utilité

$$J(z, v) = \int_0^1 U(t, c^{z, \theta_v}(t)) \, dt$$

sous la contrainte d'état $d\theta_v/dt = v$, $\theta_v(0) = 0$ et avec $v(t) \geq 0$, $0 \leq \int_0^t v(s) \, ds \leq t$, $0 \leq z(t) \leq \omega(t) \quad \forall t \in [0, 1]$. c^{z, θ_v} est le taux de consommation de l'agent et a pour expression $c^{z, \theta_v}(t) = \omega(t) - z(t) + \theta'(t)z(\theta(t)) \cdot \varphi(t, \theta(t))$. Dans [4] on montre que ce problème possède une solution optimale (\bar{x}, \bar{v}) . On suppose qu'il existe un ensemble I au plus dénombrable – (I pouvant être vide) – et une suite de réels $t_i \in [0, 1]$, $i \in I$, tels que la solution optimale (\bar{x}, \bar{v}) satisfasse

$$|\{s \in [0, 1] \mid \theta_{\bar{v}}(s) = t_i\}| > 0 \quad \forall i \in I. \tag{15}$$

Sous des hypothèses de régularité de (\bar{x}, \bar{v}) nos résultats donnent avec la notation des arguments $U(t, \xi)$:

Corollaire 3.2.

$$(i) \quad \bar{x}(t) \cdot \left[-\frac{\partial U}{\partial \xi}(t, c(t)) + \left\langle v_t^\theta, \frac{\partial U}{\partial \xi}(\cdot, c(\cdot)) \cdot \varphi(\cdot, t) \cdot \bar{v}(\cdot) \right\rangle \right] + \bar{x} \cdot \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \delta_{t_i} \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'_t([0, 1]),$$

où l'on a noté : $\theta = \theta_{\bar{v}}$, $c(t) = c(\bar{x}, \bar{v})(t) = \omega(t) - \bar{x}(t) + \bar{v}(t) \cdot \bar{x} \circ \theta(t) \cdot \varphi(t, \theta(t))$, $\alpha_i = \int_{\theta=t_i} \frac{\partial U}{\partial \xi}(s, c(s)) \cdot \varphi(s, \theta(s)) \, ds$,

$$|\{s \in [0, 1] \mid \theta(s) = t_i\}| > 0, \quad i \in I, \tag{16}$$

v_t^θ est une mesure de comptage.

(ii) *L'inéquation intégrodifférentielle à arguments déviés.*

$$\bar{v}(t) \cdot \left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi}(t, c(t)) \cdot \bar{x} \circ \theta(t) \cdot \varphi(t, \theta(t)) \right. \\ \left. + \int_t^1 \bar{v}(s) \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \left[\bar{x}' \circ \theta(s) \cdot \varphi(s, \theta(s)) + \bar{x} \circ \theta(s) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(s, \theta(s)) \right] ds \right\} \geq 0$$

p.p. $t \in [0, 1]$.

Remarque 4. Dans [3] θ est supposé implicitement inversible. Ce qui n'est pas le cas ici par (15). Comparer avec [3]. Il convient de noter que les conditions ci-dessus ont, d'une certaine façon, un caractère local, contrairement à ce qui existe jusqu'à présent dans la littérature, si l'on excepte le cas des translations [6] et le cas de déviations strictement monotones [3,5].

Références

- [1] M.E. Draklin, E. Litsyn, E. Stepanov, Variational methods for a class of nonlocal functionals, *Comput. Math. Appl.* 37 (1999) 79–100.
- [2] M.E. Draklin, E. Stepanov, On weak lower semi-continuity for a class of functional with deviating argument, *J. Nonlinear Anal.* 28 (12) (1997) 2205–2220.
- [3] E. Jouini, P.F. Koehl, N. Touzi, Optimal investment with taxes: an optimal control problem with endogeneous delay, *J. Nonlinear Anal.* 37 (1999) 31–56.
- [4] E. Jouini, P.F. Koehl, N. Touzi, Optimal investment with taxes: an existence result, *J. Math. Economics* 33 (2000) 373–388.
- [5] G.A. Kamenskii, On some necessary conditions of functionals with deviating argument, *Nonlinear Anal.* 17 (5) (1991) 457–464.
- [6] G.A. Kamenskii, Boundary value problems for differential-difference equations arising from variational problems, *Nonlinear Anal.* 18 (8) (1992) 801–813.
- [7] L. Samassi, Travail en préparation.
- [8] L. Samassi, R. Tahraoui, Travail en préparation.
- [9] J.A. Wheeler, R.P. Feynman, Classical electrodynamics in term of direct interparticle actions, *Rev. Modern Phys.* 21 (3) (1949) 425–433.